

**Strahlungshydrodynamische
Modelle der Grenzschicht
von Akkretionsscheiben**

Wilhelm Kley

Disbui. München

1988

**Strahlungshydrodynamische Modelle der Grenzschicht
von Akkretionsscheiben**

Dissertation

der Fakultät für Physik

der Ludwig - Maximilians - Universität

München

vorgelegt von

Wilhelm Kley

München, 5. September 1988

1. Gutachter : Prof. Dr. R. P. Kudritzki

2. Gutachter : Prof. Dr. T. Gehren

Tag der mündlichen Prüfung : 6.12.1988

DISSERTATIONS- UND FOTODRUCK FRANK GmbH
8000 München 2, Gabelsbergerstr. 15, Tel. 288663

Inhaltsverzeichnis

1	Zusammenfassung	1
2	Akkretionsscheiben in engen Doppelsternsystemen	3
2.1	Theorie	4
2.1.1	Modellvorstellung	4
2.1.2	Mathematische Formulierung	5
2.2	Beobachtungen	11
2.2.1	Spektren	11
2.2.2	Massentransferraten	13
2.2.3	Geometrie	15
2.2.4	Viskosität	17
3	Die Grenzschicht von Akkretionsscheiben	19
3.1	Theorie	19
3.1.1	Optisch dicke Grenzschicht	20
3.1.2	Optisch dünne Grenzschicht	23
3.1.3	Das Heiße Korona Modell	24
3.1.4	Durchmischung mit Sternmaterie	25
3.1.5	Zeitabhängige Rechnungen	26
3.1.6	Winde und Weiße Zwerge	28
3.2	Relevante Beobachtungen	29
3.2.1	Allgemeine Röntgenbeobachtungen	29
3.2.2	Weiche Röntgenstrahlung	30
3.2.3	FUV-Beobachtungen	33
3.2.4	P Cyg-Profile	33
3.2.5	Temperaturen der Weißen Zwerge	34
3.2.6	Nova-Hüllen	35
3.3	Die Zielsetzung der Arbeit	36

4	Die Gleichungen der Strahlungshydrodynamik	37
4.1	Vorüberlegungen	37
4.2	Die Momentengleichungen des Strahlungsfeldes	38
4.2.1	Die Eddingtonnäherung	42
4.2.2	Flux-Limited Diffusion	44
4.3	Hydrodynamische Gleichungen	48
4.4	Hilfsgleichungen	51
5	Numerische Methode	53
5.1	Allgemeines zum Verfahren	53
5.1.1	Rechenbereich und Gitter	53
5.1.2	Dimensionslose Variable	55
5.2	Zeitschritt	55
5.3	Advektionsterme	56
5.4	Kraft- und Druckterme	57
5.5	Viskositätsterme	58
5.5.1	Drehimpulsdiffusion	59
5.5.2	Diffusion des poloidalen Impulses	60
5.5.2.1	ADI - Methode	61
5.5.2.2	SOR - Methode	62
5.6	Radiativer Teil	64
5.6.1	Vorüberlegungen	64
5.6.2	Vollständige Linearisierung	65
5.6.3	Teilweise Linearisierung	67
6	Tests, Randbedingungen und vorbereitende Rechnungen	69
6.1	Tests	69
6.1.1	Advektions- und Kraftterme	69
6.1.2	Reibungsterme	71
6.1.3	Radiative Terme	75
6.2	Vertikale Scheibenstruktur	80
6.3	Gittergröße und Randbedingungen	84
6.3.1	Randbedingungen	86
6.4	Modelle ohne Strahlungstransport	90
6.5	Rechnungen unter Einschluß von Strahlungstransport	93

7	Ergebnisse	95
7.1	Vorbereitende Rechnungen	95
7.1.1	Variabler Masseneinstrom	95
7.1.2	Rechnungen mit festem $\dot{M}_{in}$	97
7.2	Die Modelle	102
7.2.1	Beschreibung der Parameter	102
7.2.2	Allgemeiner Überblick	103
7.2.3	Der Grenzschichtbereich	122
7.3	Beobachtbare Konsequenzen	128
8	Ausblick	136
	Anhang	138
A1	Die Dissipationsfunktion in Kugelkoordinaten	138
A2	Gitterskalierung	139
A3	Die Matrixelemente bei der Drehimpulsdiffusion	141
A4	Die Matrixelemente bei der Diffusion des poloidalen Impulses	142
A5	Die Differenzengleichungen des radiativen Teils bei der vollständigen Linearisierung	146
A6	Die Matrixelemente bei der teilweisen Linearisierung	152
A7	Die <i>Incomplete Cholesky Conjugate Gradient</i> Methode	154
A8	Einige astrophysikalische Konstanten	159
	Literaturverzeichnis	160
	Lebenslauf	165

1 Zusammenfassung

Die Struktur der Akkretionsscheibe in kataklysmischen Variablen ist generell gut verstanden. Probleme bereitet dagegen noch die Wechselwirkung des inneren Scheibenrandes mit dem akkretierenden Stern. Die Materie wird hier stark abgebremst und große Energiemengen, maximal die gleiche Menge wie in der gesamten restlichen Scheibe, können in einem relativ kleinen Bereich freigesetzt werden. Trotz der Bedeutung dieser Grenzschicht ist bisher keine zufriedenstellende theoretische Beschreibung ihrer Struktur gelungen.

Aufgabe dieser Arbeit ist es, selbstkonsistente Modelle der Grenzschicht zwischen der Akkretionsscheibe und dem zentralen Weißen Zwerg zu entwickeln.

Dazu wurde eine neue numerische Methode zur simultanen Lösung der hydrodynamischen Gleichungen zusammen mit einem vereinfachten Strahlungstransport entwickelt, die hier vorgestellt wird. Mit dem Algorithmus ist die Berechnung von beliebigen achsialsymmetrischen Strömungen in einem externen Gravitationsfeld mit dem Einschluß von Viskosität und Strahlungstransport möglich. Die detailliert beschriebenen Testrechnungen bestätigen die Anwendbarkeit des Verfahrens auf astrophysikalische Problemstellungen.

Die Anwendung auf die Grenzschicht in kataklysmischen Variablen liefert die folgenden wesentlichen Ergebnisse

- Geometrisch bildet die Grenzschicht einen dünnen **äquatorialen Ring** um den Weißen Zwerg mit der geringen vertikalen Ausdehnung von nur 5° . Die radiale Ausdehnung dieses Rings ist klein ($< 10^{-2} R_*$). Frühere Rechnungen, die eine Ausbreitung bis zu den Polen zeigten, werden nicht bestätigt.
- Der Großteil der Energiefreisetzung erfolgt außerhalb der Grenzschicht, und die Oberflächentemperatur erreicht dort ebenfalls ihren Maximalwert. Eine nicht-verschwindende Sternrotation führt zu einer Verringerung der dissipierten Energie und einer niedrigeren Temperatur.
- Das Gas strömt in der Nähe der Grenzschicht mit **Überschallgeschwindigkeit** radial nach innen.
- Beobachtungsmäßig wirkt sich die optisch dicke Grenzschicht vor allem im **FUV**-Bereich aus und dominiert bei höheren Inklinationen auch das Spektrum im UV-Bereich. Oberhalb der Grenzschicht und der Scheibe bildet sich eine **heiße Korona**.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit Rechnungen, die ohne konsistenten Energietransport gemacht wurden, so zeigt sich, daß dieser für eine realistische Beschreibung unbedingt notwendig ist.

2 Akkretionsscheiben in engen Doppelsternsystemen

Bei der Akkretion (Anlagerung) von Materie auf gravitierende Objekte ist eine bedeutende Freisetzung von Gravitationsenergie möglich. Ein Vergleich mit der nuklearen Energieerzeugung durch Fusion von Wasserstoff zu Helium zeigt, daß die freiwerdende potentielle Energie bei Akkretion auf kompakte (wie Neutronensterne oder Schwarze Löcher) oder auf sehr massereiche Objekte (z.B. das Zentrum einer Galaxie) erstere sogar deutlich übersteigen kann.

Folglich spielen Akkretionsprozesse in der modernen Astrophysik in verschiedenen Bereichen eine große Rolle. Sie werden diskutiert als Energielieferant bei aktiven galaktischen Kernen oder Quasaren, bei denen im Zentrum ein massereiches ($\approx 10^6 M_\odot$) Objekt vermutet wird. Die Entstehung von bipolaren Strukturen (Jets) wird hier, wie auch bei protostellaren Objekten (T Tauri Sterne, Herbig-Haro Objekte), auf Akkretionsmechanismen zurückgeführt. Nicht zuletzt ist Materieakkretion die Energiequelle in vielen engen Doppelsternsystemen mit Massenaustausch (wie *Kataklysmische Variable* (CVs) oder *Low Mass X-ray Binaries* (LMXBs)).

Es können nun verschiedene geometrische Konfigurationen unterschieden werden. Der einfachste Fall radialsymmetrischer Einströmung wird als Bondi-Akkretion bezeichnet. Die achsialsymmetrische Akkretion aus einem Wind (Bondi-Hoyle) kann z.B. zu Akkretionssäulen im "Windschatten" des Akkretors oder zu *Bow Shocks* davor führen. In engen Doppelsternsystemen mit kompakten Objekten kommt es dagegen meist zur Ausbildung einer Akkretionsscheibe oder bei starken Magnetfeldern auch zu polaren Akkretionsäulen.

Diese Arbeit befaßt sich mit der Struktur der inneren Akkretionsscheibe in CVs, bei denen der akkretierende Stern ein Weißer Zwerg (WD) ist. Es wird dabei nur die Untergruppe betrachtet, bei denen das Magnetfeld des Sterns so klein ist, daß die Akkretionsscheibe bis an die Sternoberfläche reicht, ohne bereits vorher durch magnetische Kräfte unterbrochen zu werden. Im nächsten Abschnitt werden zunächst die wichtigsten Ergebnisse der Theorie stationärer Scheiben in engen Doppelsternsystemen beschrieben und daran anschließend das dazugehörige Beobachtungsmaterial.



2.1 Theorie

2.1.1 Modellvorstellung

Seit der Entdeckung des ersten Kataklysmischen Veränderlichen (CV) U Gem durch Hind 1855 blieb die Ursache der unregelmäßigen Helligkeitsvariationen ebenso wie die Struktur dieser Systeme lange Zeit unbekannt.

Nachdem Walker (1954) die Doppelsternstruktur der alten Nova DQ Her (Her 1934) nachgewiesen hatte, schlugen Crawford & Kraft schon 1956 als erste ein Modell mit Massentransfer für die Zwergnova AE Aqr vor. In den folgenden Jahren wurde durch verbesserte Beobachtungsmethoden (Spektroskopie, *High-Speed Photometrie*) in systematischen Untersuchungen die Doppelsternstruktur fast aller alten Novae und Zwergnovae nachgewiesen. So wird heute generell folgendes Standardmodell für CVs akzeptiert (Abb. 2.1).

Das Standardmodell nicht-magnetischer Systeme

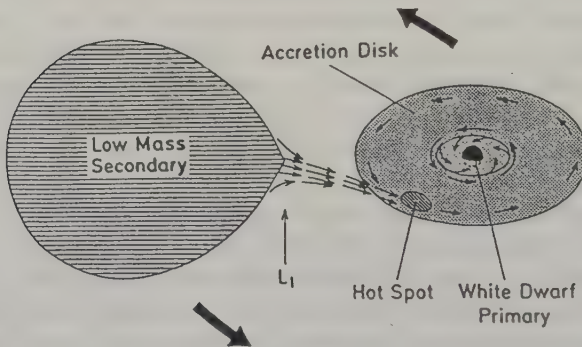


Abb. 2.1 Modellvorstellung eines kataklysmischen engen Doppelsternsystems (nach H. Ritter, 1983; Beschreibung im Text).

Ein massearmer hauptreihenähnlicher Stern (der *Sekundärstern*) füllt sein Roche-Volumen aus und transferiert einen im Mittel konstanten Materiestrom über den inneren Lagrange-Punkt (L_1) in den Anziehungsbereich der begleitenden Doppelsternkomponente, einen Weißen Zwerg (*Primärstern*). Es sei hier bemerkt, daß das griechische Wort $\kappa α τ α κ λ υ σ μ ο σ$ soviel wie Überschwemmung bedeutet, aber schon vor der eigentlichen Kenntnis eines Masseüberstroms geprägt wurde (Payne-Gaposchkin, 1938). Wegen des kleinen Primärsternradius' ($R_{WD} \approx 5 \cdot 10^8 - 10^9 \text{ cm}$) und des nicht ver-

schwindenden Bahndrehimpulses am L_1 -Punkt bzgl. des Primärsterns fällt die Materie nicht direkt auf den Stern, sondern bildet zunächst einen rotierenden Gasring um diesen. Aufgrund viskoser Wechselwirkungen verbreitert sich der Ring und es bildet sich eine Akkretionsscheibe, in der die Materie annähernd keplersch rotiert und langsam infolge von Drehimpulstransport nach innen spiralt. Dort, wo der Gasstrom auf die Scheibe auftrifft, heizt sich diese aufgrund von Kompression oder durch Schocks auf, und es entsteht der sog. *Heisse Fleck (Hot Spot, HS)*. Dieser äußert sich z.B. (bei größeren Inklinationen) in der visuellen Lichtkurve durch einen regelmäßigen (mit der Bahnperiode) Helligkeitsanstieg (*Hump*) von etwa 2^m . Am inneren Rand der Scheibe trifft die Materie auf den Primärstern und wird, da dieser i.a. langsamer rotiert als die zirkulierende Materie, abgebremst. Es entsteht eine Übergangszone zwischen Scheibe und Stern, die sog. **Grenzschrift** (*Boundary Layer, BL*), in der große Energiemengen durch Dissipation von kinetischer Energie freigesetzt werden.

Die beobachteten Nova-Ausbrüche in diesen Systemen entstehen durch Fusionsprozesse (*Thermonuclear Runaway, TNR*) auf der Oberfläche des Primärsterns. Die häufigeren Ausbrüche mit geringerer Amplitude (*Zwerg Nova*) werden durch einen erhöhten Materiestrom durch die Scheibe hervorgerufen, wobei als Ursache hierfür heute das Scheibeninstabilitätsmodell (z.B. Meyer & Meyer-Hofmeister, 1981) gegenüber dem Modell eines plötzlich erhöhten Massenstroms vom Sekundärstern (Bath, 1974) favorisiert wird.

2.1.2 Mathematische Formulierung

Im folgenden soll kurz die Theorie stationärer Akkretionsscheiben dargestellt werden, als Grundlage für spätere Kapitel dieser Arbeit. Da die mittleren freien Weglängen in der Scheibe wesentlich kleiner sind als die Dimension des Gesamtsystems (z.B. Petterson, 1983) ist eine Kontinuumsbehandlung gerechtfertigt. Die Grundlage bilden die in Kap. 4 genauer erläuterten Gleichungen der Hydrodynamik. Zu den Ersten, die sich mit der Theorie rotierender Gasscheiben beschäftigten, gehörten von Weizsäcker (1943, 1948), der sich mit der Entstehung des Planetensystems befaßte, und Lüst (1952), der genauer den Massen- und Drehimpulstransport in solchen Scheiben untersuchte und bereits nachwies, daß im Akkretionsfall (Zentralobjekt rotiert langsamer als Scheibe) unter Reibungseinfluß Drehimpuls nach außen und Materie nach innen transportiert wird. In Anwendung auf CVs haben unter Vernachlässigung der vertikalen Ausdehnung (*senkrecht* zur Bahnebene) verschiedene Autoren die zweidimensionale Struktur der Scheibe einschließlich Materiestrom (*in der Bahnebene*) berechnet. Dabei wurden z.B. von Lin & Pringle (1976), Hensler (1982a,b) und kürzlich Whitehurst (1988) Teilchenmethoden zur Simulation der hydrodynamischen Gleichungen verwendet, wohingegen Everson (1981) und Sawada *et al.* (1986) finite Differenzenmethoden

benutzten. Im wesentlichen finden die Autoren eine Scheibe, die fast das gesamte Roche-Volumen ausfüllt (z.B. Hensler, 1982b). Im inneren Teil (nahe am Primärstern) ist die Scheibe bezüglich der Rotationsachse durch den WD, in guter Näherung achsialsymmetrisch. Sawada *et al.* allerdings fanden unter Verwendung einer Differenzenmethode mit geringer numerischer Viskosität (*Osher-Scheme*) zur Lösung der idealen (reibungsfreien) Hydrodynamik stationäre Akkretionsschocks.

Für ein vereinfachtes analytisches Modell zur Berechnung der wesentlichen Struktur einer stationären Scheibe verwendet man im Mittelpunkt des Primärsterns zentrierte Zylinderkoordinaten (r, φ, z) , über die z -Richtung integrierte Größen (z.B. Flächendichte, wie bei obigen Modellen) und zusätzlich Achsialsymmetrie ($\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$). Das ursprünglich dreidimensionale Problem wird so auf ein eindimensionales reduziert. Wesentliche Beiträge zur Lösung dieses Problems stammen u.a. von Prendergast & Burbidge (1968), Shakura & Sunyaev (1973) und Lynden-Bell & Pringle (1974). Ausführliche Darstellungen mit weiteren Referenzen finden sich in den Reviews von Pringle (1981), Verbunt (1982) oder Petterson (1983) und in dem Buch von Frank *et al.* (1985).

Im folgenden seien kurz die grundlegenden Gleichungen, die später noch benötigt werden, erläutert. Aus der Massenerhaltung erhält man sofort

$$\dot{M} = -2\pi r u_r \Sigma, \quad (2.1)$$

wobei
$$\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \, dz \quad (2.2)$$

die vertikal integrierte Scheibendichte ρ ist (Oberflächendichte). $\dot{M}$ ist der Massenstrom durch die Scheibe (auch $\dot{M}_D$) mit positivem Vorzeichen und u_r die radiale (negative) Einfallgeschwindigkeit.

Wenn die Druckkräfte in der Scheibe wesentlich kleiner als die Gravitationskräfte sind (dünne Scheibe) und $u_r \ll u_\varphi$, dann folgt aus der radialen Impulsgleichung

$$u_\varphi = \sqrt{\frac{GM_*}{r}} \quad (2.3)$$

(G Gravitationskonstante, M_* Masse des Zentralobjekts), d.h. die Scheibe rotiert keplersch. Aus der tangentialen Impulsgleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r u_\varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\varphi})$$

ergibt sich mit $T_{r\varphi} = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right)$ und Gl.(2.3) durch Integrieren

$$\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_*}{r} \right)^{1/2} \right], \quad (2.4)$$

wobei die kinematische Viskosität $\nu = \eta/\rho$ als konstant betrachtet wurde, und als innere Randbedingung (hier bei $r = R_*$) $\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$ verwendet wurde ($\omega = \frac{u_\varphi}{r}$ ist die Winkelgeschwindigkeit). Die Randbedingung beschreibt die Kopplung an den Primärstern und führt zu Abweichungen von der Keplerbewegung (z.B. Pringle, 1981).

Faßt man Gln. (2.1) und (2.4) zusammen, so folgt bei $r \gg R_*$ für die radiale Geschwindigkeit

$$|u_r| = \frac{3}{2} \frac{\nu}{r}. \quad (2.5)$$

Mit Hilfe des weiter unten beschriebenen α -Ansatzes (Gl. 2.13) erkennt man, daß für die radiale und azimuthale Geschwindigkeit $u_r \ll c_s \ll u_\varphi$ gilt.

Im stationären Gleichgewichtsfall gilt für die Gas- und Strahlungsenergie $\nabla \cdot \mathbf{F} = \Phi$ ($\mathbf{F}$ = Strahlungsfluß, Φ = Dissipationsfunktion, s. Kap. 4). Bei Vernachlässigung des radialen Transports und Keplerrotation erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{9}{4} \nu \rho \frac{G M_*}{r^3}$$

(F = vertikaler Strahlungsfluß). Integriert über die halbe Scheibe folgt mit (2.4) und $F_D = \sigma_B T_{\text{eff}}^4$ (F_D = emittierter Fluß von der Scheibenoberfläche, σ_B = Stefan-Boltzmann Konstante, T_{eff} = Effektivtemperatur)

$$T_{\text{eff}} = \left\{ \frac{3}{8\pi\sigma_B} \frac{G M_* \dot{M}}{r^3} \left[1 - \left(\frac{R_*}{r} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/4}. \quad (2.6)$$

Die Leuchtkraft der gesamten Scheibe ist dann

$$L_D = 2 \int F_D 2\pi r dr = \frac{1}{2} \frac{G M_* \dot{M}}{R_*} = \frac{1}{2} L_{\text{acc}}. \quad (2.7)$$

D.h., die Scheibe emittiert nur die Hälfte der maximal möglichen Akkretionsleuchtkraft L_{acc} . Die andere Hälfte wird bei einem langsam rotierenden Primärstern in der Grenzschicht freigesetzt. Eine erste Abschätzung der spektralen Verteilung der Scheibenleuchtkraft erhält man bei Annahme von Schwarzkörperstrahlung durch radiale Integration der verschiedenen Planckverteilungen mit der Temperaturabhängigkeit (2.6). Bei großen Scheiben, bzw. großem Temperaturunterschied zwischen Innen- (T_{max}) und Außenrand (T_{min}), gilt asymptotisch im Bereich $k T_{\text{min}} \ll h\nu \ll k T_{\text{max}}$

$$F_\nu \sim \nu^{1/3}, \text{ bzw. } F_\lambda \sim \lambda^{-\alpha} \quad (\alpha = 2.33) \quad (2.8)$$

(Lynden-Bell & Pringle, 1974).

Bei Annahme von Isothermie folgt aus der vertikalen Impulsgleichung

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{GM_* z}{r^3} \quad (\text{bei } z \ll r) \quad (2.9)$$

für die vertikale Dichteschichtung eine Gauß-Verteilung $\rho = \rho_c e^{-\left(\frac{z}{H}\right)^2}$, mit der Skalenhöhe

$$H = \left(\frac{2 R T_c r^3}{\mu G M_*} \right)^{1/2} \quad (2.10)$$

und der Zentraldichte $\rho_c = \Sigma / (H \pi^{1/2})$ (R = Gaskonstante, μ = mittl. Molekulargewicht). In Gl. (2.10) bezeichnet T_c die Zentraltemperatur in der Scheibe und ist mit der Effektivtemperatur über die optische Tiefe verknüpft $T_{\text{eff}} = T_c / \tau$. Ist die Opazität nur schwach vom Radius abhängig (s. Modelle von Shakura & Sunyaev), so erkennt man mit Gl. (2.6), daß für $r \gg R_*$

$$H \sim r^{9/8}$$

gilt, d.h. die Scheibe ist *konkav* geformt, sie wird nach außen relativ dicker.

Bei der Ableitung der Gleichungen einer stationären Akkretionsscheibe (2.1-2.10) wurde nirgends explizit auf die Größe der Viskosität eingegangen. Ganz allgemein kann die Effektivität der Viskosität abgeschätzt werden durch die Reynoldszahl Re , die das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungseffekten beschreibt. Für die Strömung in einer Akkretionsscheibe erhält man

$$Re = \frac{\rho \frac{u_\varphi}{r}}{T_{r\varphi}/r} \approx \frac{\rho r u_\varphi}{\eta} = \frac{r u_\varphi}{l u_1} \quad (2.11)$$

($\eta = \rho l u_1$), wobei l und u_1 typische Längen bzw. Geschwindigkeiten der Viskosität sind. Ist $Re \ll 1$, so dominieren die Reibungsterme, und bei $Re \gg 1$ spielen sie keine Rolle. Für den Fall molekularer Viskosität gilt

$$\eta_{\text{mol}} = 10^{-16} \cdot T[K]^{5/2} \left[\frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}} \right]$$

(Paczynski, 1978), und mit typischen Werten ($r \approx 10^{10} \text{ cm}$, $\rho \approx 10^{-5} \text{ g/cm}^3$, $T \approx 10^5 \text{ K}$) erhält man

$$Re_{\text{mol}} \approx 10^{10}.$$

Eine solch geringe Viskosität führt zu so langen Zeitskalen (vgl. Abschn. 2.2.4) und damit zu der Schlußfolgerung, daß molekulare Viskosität allein *nicht* genügend Mate-

rie (Drehimpuls) transportieren kann. Ebenso zeigt sich, daß auch Strahlungsviskosität dazu nicht in der Lage ist (Duschl, 1985). Aus Laborexperimenten ist bekannt, daß auch anfänglich laminare Strömungen oberhalb einer bestimmten kritischen Reynoldszahl $Re_c \approx 10^3$ instabil und turbulent werden. In diesem Fall erhöht sich die effektive Viskosität auf

$$\nu_t = u_t l_t, \quad (2.12)$$

wobei u_t und l_t die mittlere Geschwindigkeit und Ausdehnung der Turbulenzelemente beschreiben. Turbulenz führt also zu einer Reskalierung des Viskositätskoeffizienten bei ansonsten gleicher Struktur der Gleichungen. Nun ist u_t sicherlich kleiner als die Schallgeschwindigkeit c_s (weil sonst viele schwache Schocks zu vermehrter Dissipation und Abbremsung führen) und aus geometrischen Gründen ist l_t kleiner/gleich der vertikalen Scheibendicke H_D ($H_D \approx H$, Gl. (2.10)). Damit folgt aus Gl. (2.12)

$$\nu_t = \alpha c_s H \quad (2.13)$$

mit $\alpha \lesssim 1$. Dies ist der bekannte α -Ansatz für Akkretionsscheiben, der von Shakura & Sunyaev (1973), von nun an mit SS abgekürzt, in einer grundlegenden Arbeit eingeführt wurde. SS schätzen ab, daß auch die magnetische Viskosität, verursacht durch kleinskalige Magnetfelder in der turbulenten Strömung, durch den Ansatz (2.13) beschrieben werden können. Es sei hier betont, daß beim α -Ansatz all die Unsicherheiten über Erzeugungsmechanismus und Stärke der Viskosität geschickterweise in einen Parameter (α) subsumiert werden. Gl. (2.13) ist äquivalent zu

$$T_{r\varphi} = \alpha p \quad (2.14)$$

(wegen $T_{r\varphi} \sim \eta_t u_\varphi / r$, $H/r \sim c_s / u_\varphi$, $p \sim \rho c_s^2$; siehe SS). Die turbulente Viskosität wirkt also in diesem Fall im wesentlichen wie ein zusätzlicher Turbulenzdruck. Viele der späteren Arbeiten über Akkretionsscheiben haben den α -Ansatz in ihren Rechnungen verwendet (z.B. Übersicht in Verbunt, 1982).

Lynden-Bell & Pringle (1974) argumentieren, daß sich die Reynoldszahl in der Scheibe auf den kritischen Wert (10^3) einstellt und schätzen die effektive kinematische Viskosität zu $\nu \sim 10^{-3} R_* u_\varphi (R_*)$ ab, erhalten also einen konstanten Wert. Weil manche Laborexperimente auf konstantes ν_t hinweisen, wird auch in dieser Arbeit $\nu_t = \text{const.}$ angenommen, wobei der genaue Wert an die Beobachtungen angelehnt ist.

Die Standardscheibentheorie macht keine Aussagen über die z -Abhängigkeit der physikalischen Größen. So haben auf der Grundlage der eindimensionalen Modelle z.B.

Meyer & Meyer-Hofmeister (1982) die vertikale Scheibenstruktur auch mit Berücksichtigung von konvektivem Energietransport berechnet. Sie finden dabei ganz analog zu Sternaufbaurechnungen Bereiche mit rein konvektivem Energietransport (in den kühleren Regionen bei größeren Radien) und welche mit überwiegend radiativem Transport.

Unter Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung haben Urpin (1983, 1984) und Siemiginowska (1988) versucht, die z -Abhängigkeit des Geschwindigkeitsfeldes zu berechnen. Ausgangspunkt dabei ist die Überlegung, daß ähnlich einem rotierenden Stern auch in einer Akkretionsscheibe gleichzeitiges thermisches und hydrostatisches Gleichgewicht nicht erfüllt sein kann (Kippenhahn & Thomas, 1982). Siemiginowska findet dann auch eine meridionale Zirkulation der Scheibenmaterie, wogegen bei Urpin sich die Materie *in* der Äquatorebene ($z=0$) überraschenderweise vom Zentralstern *entfernt* und in höheren Schichten einfällt. Dies Resultat ist zunächst einmal nicht zu verstehen, weil es einigen Ergebnissen der Scheibentheorie (z.B. Drehimpulstransport *in* der Scheibe, vertikale Schichtung) widerspricht. Die hier vorgestellten Rechnungen (wie auch schon die in Kley & Hensler, 1987a beschriebenen) zeigen dann auch den *gegenteiligen* Effekt.

2.2 Beobachtungen

Bei den massereichen Röntgendoppelsternen mit einem akkretierenden Neutronenstern wird die freigesetzte Energie hauptsächlich als harte Röntgenstrahlung aus dem inneren Bereich der Scheibe emittiert. Der Begleitstern, ein massereicher O oder B (Über-) Riese, hat sein Strahlungsmaximum im UV und Optischen und überstrahlt wegen seiner höheren Leuchtkraft total den sonstigen Scheibenanteil. Bei den LMXBs ist der Sekundärstern zwar wesentlich masseärmer und lichtschwächer, so daß die Scheibe den Hauptteil der Energieabstrahlung bilden würde, aber die Leuchtkraft der Scheibe wird durch reprozesierte harte Röntgenstrahlung dominiert (im Optischen ist $L_{\text{disc}}(\text{LMXB}) \approx 100 L_{\text{disc}}(\text{CV})$).

Im Vergleich zu diesen Systemen kommt bei den CVs ein Großteil der Leuchtkraft von der Scheibe mit Schwerpunkt der Abstrahlung im UV, optischen und IR Bereich. Die Klasse der CVs ist also wegen der ungestörten Scheibenstrahlung ideal geeignet zur systematischen Untersuchung der physikalischen Eigenschaften realer Akkretionsscheiben in engen Doppelsternsystemen (s. hierzu auch Frank *et al.*, 1985, S. 91).

Im folgenden werden kurz die wesentlichen Beobachtungsbefunde von Akkretionsscheiben in CVs skizziert, wobei dies nur eine kleine Auswahl darstellt angesichts der Vielfalt der beobachteten Effekte und des Umfangs der Literatur. Wichtige Reviews in diesem Zusammenhang sind u.a. die von Robinson (1976), Warner (1976), Patterson (1984) und Wade & Ward (1985).

2.2.1 Spektren

Einen der direktesten Hinweise auf eine Akkretionsscheibe erhält man aus den sehr breiten und bei größeren Inklinationen meist noch zusätzlich aufgespaltenen Emissionslinien von *H* und *He* im **Ruhezustand**¹⁾ vieler Systeme (Abb. 2.2).

Die Breite dieser Linien entspricht Dopplerverschiebungen im Bereich 200–1500 km/s (Warner, 1976). Periodische Verschiebungen der Linien weisen auf einen Ursprung in der Nähe des Primärsterns hin. Das Auftreten der klassischen 'rotational disturbance' (die blaue Seite des Linienprofils wird zeitlich vor der roten bedeckt), für CVs (DQ Her) als erste von Greenstein & Kraft (1959) nachgewiesen, wurde schon von Joy (1942), allerdings für Algolveränderliche, als schnell rotierendes Gas gedeutet, das den Primärstern umgibt.

Unter der obigen Modellannahme (vgl. Abb. 2.1) stellt der Abstand der Linienkomponenten die projizierte Geschwindigkeit $v \sin i$ des Teils der Scheibe mit entsprechender Temperatur dar. Die breiten Flügel lassen sich leicht durch eine mit Keplerge-

1) Als Ruhezustand wird die Phase geringerer Helligkeit (Minimum) zwischen den Ausbrüchen bezeichnet, in denen der Massenstrom durch die Scheibe kleiner als während der Ausbrüche (Maximum) ist.

schwindigkeit rotierende Scheibe erklären. Durch genauere Analysen von Bedeckungen kann sogar das (radiale) Geschwindigkeitsprofil der Scheibe bestimmt werden (Young & Schneider, 1980; Young *et al.*, 1981).

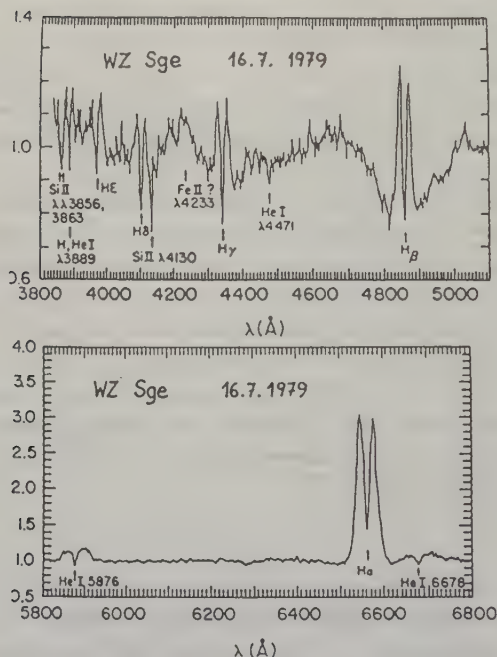


Abb. 2.2 Ausschnitt aus einem typischen Minimumspektrum eines CVs (WZ Sge, aus Gilliland *et al.*, 1986).

Im **Ausbruch** wandelt sich das Spektrum deutlich. Anstelle der im Ruhezustand dominierenden starken Emissionslinien erscheinen nun breite Absorptionslinien von *H* und *He* mit Halbwertsbreiten von bis zu $50 \text{ \AA}$. Die Frage, ob solch breite Linien durch Druckverbreiterung (wie bei normalen Weißen Zwergen) oder Rotationsverbreiterung (ein $0.8 M_{\odot}$ WD hat etwa $u_k \approx 4000 \text{ km/s}$ an seiner Oberfläche, was etwa $50 \text{ \AA}$ ergibt) hervorgerufen werden, ist heute eindeutig zugunsten des Rotationsmechanismus entschieden worden (Warner, 1976).

Ebenso wie aus einzelnen Linien kann im Prinzip aus dem Verlauf des **Kontinuums** auf eine Scheibe geschlossen werden. Die charakteristische Steigung des Kontinuums einer Akkretionsscheibe bei Schwarzkörperannahme

$$F_{\lambda} \sim \lambda^{\alpha} \quad (\alpha = -2.33, \text{ s. Gl. 2.8})$$

sollte sich am ehesten beim Ausbruch zeigen, weil hier die Scheibe wegen des erhöhten Massenflusses optisch dick ist. Dabei muß allerdings berücksichtigt werden, daß dieser Verlauf nur bei *stationären*, größeren Scheiben (wesentlich unterschiedliche Temperaturen am Außen- und Innenrand s.o.) zu erwarten ist und abhängig von der Inklination sein kann. Ebenso sollte auch ein größerer Wellenlängenbereich beobachtet werden. Die beobachteten Spektralindizes α liegen nun allgemein bei CVs zwischen 0 und -4. Im Ausbruch aber liegt der Mittelwert aller im UV (IUE)

beobachteten Systeme (20 bis 1984) bei $\alpha = -2.31 \pm 0.15$ (Szkody, 1985), bestätigt also sehr gut den theoretischen Verlauf.

Die Spektrumsuntersuchungen (Linien & Kontinuum) zeigen also, daß im Minimum die Scheibe zumindest teilweise optisch dünn ist (starke Emissionslinien) im Ausbruch aber optisch dick (Absorption), wobei das theoretische Kontinuum der Standardscheibe dann eine gute Approximation an das beobachtete darstellt. Dies ist auch ein Hinweis auf einen erhöhten Massendurchstrom $\dot{M}_D$ durch die Scheibe während der Ausbruchphase. Ob allerdings auch die Bedingungen der Stationarität erfüllt sind, hängt von den entsprechenden Zeitskalen (thermischer & viskoser) ab. Systeme mit Stillstand (Z Cam-Sterne), die generell ein hohes $\dot{M}_D$ haben (z.B. Warner, 1987), oder solche im permanenten Ausbruch (UX UMa) sollten diese Voraussetzungen noch am ehesten erfüllen (Bath & Pringle, 1985).

Abschließend sei bemerkt, daß für eine genaue Untersuchung natürlich detaillierte theoretische Scheibenspektren analog zu Sternatmosphärenmodellen (SAM) berechnet werden müssen. Aber "Dank" starker Vereinfachungen (z.B. aus SAMs zusammengesetzte Spektren (Wade, 1984)) und einiger zusätzlicher unbekannter Effekte, wie Dissipation in der Atmosphäre, Einfluß von Einstrahlung aus anderen Quellen und mögliche Inhomogenitäten (Frank *et al.*, 1985), ist das Gebiet der theoretischen Scheibenspektren immer noch in einem rudimentären Zustand (la Dous, 1984).

2.2.2 Massentransferrate

Da nicht vorausgesetzt werden kann, daß die Massenüberstromrate vom Sekundärstern ($\dot{M}_t$) immer identisch ist mit der Durchstromrate durch die Scheibe ($\dot{M}_D$), sollen sie hier unterschieden werden. Im langen zeitlichen Mittel (über Ausbruchs- und Ruhephasen) muß aber sicherlich $\dot{M}_t = \dot{M}_D$ gelten.

Um ein langanhaltendes $\dot{M}_t$ in einem Doppelsternsystem, das stabil ist gegen Massentransfer, zu gewährleisten, muß diesem ständig Drehimpuls entzogen werden (z.B. King, 1988). Die beiden einzigen Mechanismen in der heutigen Diskussion, die diesen Verlust hervorrufen könnten, sind Gravitationsquadrupolstrahlung und Bremsung durch einen magnetischen (Stern-) Wind. Abschätzungen ergeben $\dot{M}_t$ -Werte im Bereich 10^{-9} bis $10^{-10} M_\odot/\text{yr}$, was in der beobachteten Größenordnung (s.u.) liegt. Allerdings sind bei der magnetischen Bremsung momentan nur semi-empirische Ansätze möglich (Verbunt & Zwaan, 1981).

Zur experimentellen Bestimmung von $\dot{M}_t$ bietet sich zunächst die säkulare Änderung der Bahnumlaufperiode $\dot{P}$ an. Die beobachteten Änderungen von $\dot{P}$ aus genauen zeitlichen Bedeckungsbestimmungen haben jedoch teilweise wechselndes Vorzeichen,

und die Massen der Komponenten sind i.a. auch nur ungenau bekannt²⁾, so daß die Methode, $\dot{M}_t$ aus $\dot{P}$ zu bestimmen, schlecht geeignet ist (Patterson, 1984). Wenn man annimmt, daß die kinetische Energie der transferierten Materie beim Aufprall auf die Scheibe in thermische und schließlich in Strahlungsenergie umgesetzt wird, so kann aus der bolometrischen Helligkeit des Hot-Spots im Prinzip (wenigstens größenordnungsmäßig) auf $\dot{M}_t$ geschlossen werden. Diese Methode ist z.B. von Krzeminski & Smak (1971) (WZ Sge) oder Paczynski & Schwarzenberg-Czerny (1980) (U Gem) angewandt worden mit dem Ergebnis, daß $\dot{M}_t \approx 5 \cdot 10^{16} \text{ g/s}$. Nach Patterson (1984) ist diese Methode allerdings wegen der ungenauen Distanzen, unbekannten bolometrischen Korrekturen und letztlich der wenigen Systeme (9) mit deutlichem Hot-Spot (Hump) in der Lichtkurve ebenso unsicher.

Der Massenstrom durch die Scheibe ($\dot{M}_D$) läßt sich im Prinzip direkt aus der Akkretionsleuchtkraft

$$L = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Omega_*^0}{\Omega_*^k}\right) \frac{G M_* \dot{M}}{R_*} \quad (2.15)$$

bestimmen, wobei der Vorfaktor (s. Gl. 3.2) eine mögliche Rotation des Primärsterns berücksichtigt. Bei nicht rotierendem Weißen Zwerg und nach Abzug der in der BL zu erwartenden Strahlung erhält man für die Scheibenleuchtkraft $L_D = \frac{1}{2} \frac{G M_* \dot{M}}{R}$ (s. Gl. 2.7) mit hauptsächlichlicher Emission im nahen UV Bereich. Der Anteil von L_D an der beobachteten Leuchtkraft L_{obs} ist nun nicht genau bekannt, weil noch weitere Quellen, wie z.B. der Hot-Spot oder die beiden Sterne zu L_{obs} beitragen. Weiterhin sind M_* und R_* nur unzureichend bekannt, aber wegen der Masse-Radius-Relation (s. Gl. 6.9, S. 84) für Weiße Zwerge ist der Einfluß der Sternmasse auf L_D recht empfindlich. Nicht zuletzt sind die bolometrischen Korrekturen und somit die Entfernungen unsicher.

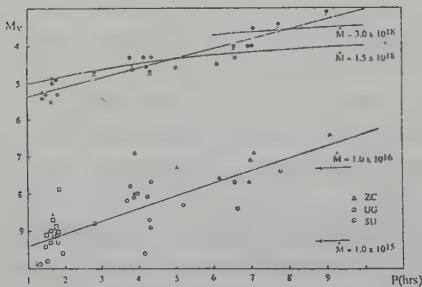


Abb. 2.3 Die absolute visuelle Helligkeit von CVs im Ausbruch (max) und Ruhezustand (min) in Abhängigkeit von der Periode P . Die Relation (2.16) führt zu den eingezeichneten Ausgleichgeraden. Weiterhin sind die Kurven konstanten Massendurchstroms $\dot{M}_D$ gekennzeichnet. (nach Warner, 1987).

2) Bei der theoretischen Berechnung der Periodenänderung ist das Massenverhältnis $q=1$ ein singulärer Punkt.

Trotz dieser großen Unsicherheiten ist es möglich, einige Abschätzungen von $\dot{M}_D$ zu erhalten, vor allem über die absolute visuelle Helligkeit von CVs. Zur Entfernungsbestimmung werden dabei Infrarotbeobachtungen der Sekundärsterne, die auf der unteren Hauptreihe liegen, oder Haufenzugehörigkeit o.ä. verwendet. Warner (1987) findet für M_v (absolute Helligkeit der Scheibe bei mittlerer Inklination 56.0°) im Ausbruch (max) und in Ruhe (min) (s. Abb. 2.3)

$$M_v(\text{max}) = 5.64 - .259 P(h) \quad \begin{matrix} \pm .13 & \pm 0.24 \end{matrix} \quad (2.16)$$

$$M_v(\text{min}) = 9.75 - .337 P(h) \quad \begin{matrix} \pm .25 & \pm 0.56 \end{matrix}$$

Aus dem Vergleich mit theoretischen Flüssen für $M_{WD} = 1 M_\odot$ folgert er $\dot{M}_D(\text{max}) \approx (1 - 3) \cdot 10^{18} \text{ g/s}$ und $\dot{M}_D(\text{min}) \approx 5 \cdot 10^{15} - 10^{16} \text{ g/s}$ und interpretiert die Tatsache, daß $\dot{M}_D(\text{max}) \approx \text{const.}$ ist für alle Zwergnovae (s. Abb. 2.3) als Hinweis auf eine gemeinsame Obergrenze der Viskosität in diesen Systemen (s.u.). Weitere mögliche Bestimmungen von $\dot{M}_D$ aus der Rotationsbeschleunigung der Weißen Zwerge $\dot{P}_{WD}$ (Ritter, 1985) und aus der Äquivalentbreite von Linien oder Farben (Patterson, 1984) sind vorgeschlagen worden.

2.2.3 Geometrie

Aus Bedeckungsanalysen des Hot-Spots und der Annahme, daß dieser am Außenrand der Scheibe liegt, kann unter Verwendung von theoretischen Trajektorien im Roche-Potential auf den Radius der Scheibe geschlossen werden (z.B. Sulkanen *et al.*, 1981). Die so gewonnenen Radien reichen bis nahe an die Roche-Grenze, $R_D/A \approx .40 - .60$ (Robinson, 1976), wobei A der Abstand der Komponenten ist. Auf den mittleren Roche-Radius R_L des Primärsterns bezogen, stellt dann $R_D \approx .6 - .7 R_L$ eine gute Näherung dar.

Aus Bedeckungslichtkurven folgt ferner, daß die Scheibe dünn ist mit $H/R \approx .1$, aber der Hot-Spot eine größere vertikale Ausdehnung hat (Warner, 1976).

Eine detaillierte Helligkeitsverteilung $I(r)$ der Scheibe, die einer Temperaturverteilung $T(r)$ entspricht, erhält man ebenso aus Bedeckungslichtkurven. Ganz grob erwartet man bei höheren Temperaturen zum Scheibenzentrum hin eine kürzere Bedeckungsdauer bei kleineren Wellenlängen. Die sog. "Eclipse mapping method" von Horne (1985) rekonstruiert mit Hilfe der Entropiemaximierung die wahrscheinlichste Helligkeitsverteilung über die Scheibe, die mit der beobachteten Lichtkurve (z.B. Abb. 2.4) verträglich ist, und stellt somit ein hervorragendes Instrument zur Erstellung von "Bildern" von Akkretionsscheiben dar. Anwendung auf Z Cha im Ausbruch

(Horne & Cook, 1985) zeigen eine gute Übereinstimmung des Temperaturverlaufs mit dem theoretischen $T \sim r^{-3/4}$ -Profil. Es ist ebenso möglich, nicht achsialsymmetrische Strukturen, wie den Hot-Spot darzustellen.

Die Übertragung der obigen photometrischen Analyse auf Spektren ergibt die sog. "Doppler imaging method" (Marsh *et al.*, 1987). Dabei werden zeitlich aufgelöste 'Bedeckungsspektren' untersucht und mit theoretischen Modellen verglichen. Die Anwendung dieser Methode erneut auf Z Cha bestätigt zunächst eine vertikal dünne Scheibe (der Großteil der Emissionslinienerzeugung findet innerhalb $\Delta z \approx .02 R_L$ statt). Die Emissivität der Balmerlinien variiert mit $r^{-2.25}$ und deutet somit ebenfalls auf eine Flußkonzentration im zentralen Scheibenbereich. Sie finden auch Hinweise auf Abweichungen vom Keplerschen Geschwindigkeitsfeld und eine nicht achsialsymmetrische Intensitätsverteilung.

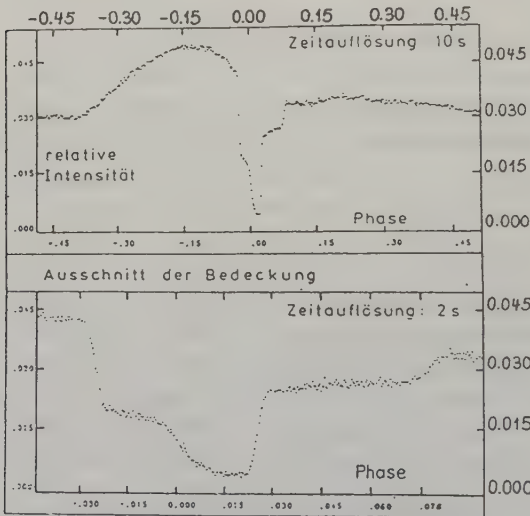


Abb.10: Die mittlere Lichtkurve von OY Car in der Farbe B; etwa 25 Perioden; vom 26.1. bis 2.2.1984.

Abb. 2.4
Die mittlere Lichtkurve des bedeckenden Systems OY Car (nach Dreier, 1986).

Mit Hilfe von Analysen dieser Art ist auch eine radialer Dichteabfall $\rho \sim r^{-2}$ in der Scheibe bei manchen Systemen gefunden worden (Smak, 1985 und Referenzen darin). Über die absoluten Dichten im optisch dünnen Bereich der Scheibe geben die Äquivalentbreiten der Linien Auskunft. Für eine optisch dünne Scheibe ergeben die Analysen für die Elektronendichten $n_e \sim 10^{10} - 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ (Warner, 1976; Robinson, 1976). Die Ergebnisse von n_e bis zu 10^{21} cm^{-3} , die Robinson zitiert, scheinen auf sehr unsicheren Annahmen über Massentransferrate und Scheibenmasse zu beruhen.

Im Ausbruchsfall läßt das Vorliegen einer optisch dicken Scheibe auf eine minimale Dichte von $\rho \approx 10^{-8} \text{ g/cm}^3$ schließen (Warner, 1976).

2.2.4 Viskosität

Nachdem einige der wichtigsten Beobachtungshinweise auf Akkretionsscheiben skizziert wurden, fehlen noch Aussagen über die Größenordnung der Viskosität. Da in der Gleichung für die Temperatur der Scheibe (2.6) die Viskosität nicht explizit auftritt, ist es nicht möglich, direkt aus der Beobachtung der Strahlung einer (stationären) Scheibe etwas über ν auszusagen. Nur zeitabhängige Effekte können darüber Auskunft geben. Im allgemeinen wird die Abfallzeit vom Maximum des Ausbruchs (typischerweise ein bis zwei Tage) als viskose Zeitskala interpretiert und gibt die einzige direkte 'Messung' der Viskosität, wie Bath & Pringle (1985) herausstellen. Sie geben einen mittleren Wert von $\nu \approx 10^{15} \text{ cm}^2/\text{s}$ entsprechend $\alpha \approx 1$ an.

Zwischen der Abfallzeit und der Bahnperiode besteht eine starke Korrelation, auf die zunächst Bailey (1975) ("Bailey-Relation") hingewiesen hat. Ein linearer Ausgleich mit neueren Daten (s. auch Abb. 2.5) liefert

$$\Delta t_a(d) = .40 + 8.2 P(d) \quad (2.17)$$

$\pm .19 \quad \pm 1.0$

(van Paradijs, 1983).

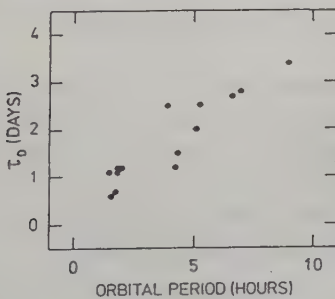


Abb. 2.5
Relation zwischen Abfallzeit τ_D (im Text Δt_a) vom Ausbruch und der Bahnperiode (nach van Paradijs, 1983).

Theoretische Ausbruchsrechnungen mit dem Scheibeninstabilitätsmodell reproduzieren die Relation (2.17) wie auch die beobachtete Ausbruchperioden-Ausbruchsamplituden-Relation (Payne-Gaposchkin, 1938) einigermaßen und führen zu $\alpha \approx 0.2$ (Smak, 1984a). Eine einfache Deutung einer Δt_a - P -Relation erhält man mit folgenden Überlegungen: Für die viskose Zeitskala gilt näherungsweise $\tau_v = L^2/\nu$, wobei L eine charakteristische Länge darstellt. Sei nun τ_v die Abfallzeit Δt_a und $L = \frac{1}{2} R_D$, so folgt unter Verwendung von $R_D = .7 R_L$ (s.o),

$$R_L = (.38 - .2 \log q) A \quad (q = M_2/M_1) \quad (2.18)$$

(Pasczinski, 1971) und des Keplerschen Gesetzes, $A^2 = [G (M_1 + M_2) P^2 / (4 \pi^2)]^{2/3}$

$$\Delta t_a = 2.27 \cdot 10^{-2} f(q) (GM_1)^{2/3} P^{4/3} / \nu. \quad (2.19)$$

Die Funktion $f(q)$ ist gegeben durch $f(q) = [(.38 - .2 \log q) (1 + q)^{1/3}]^2$ und variiert im relevanten q -Bereich in der in Tab. (2.1) angegebenen Weise.

q	0.10	0.33	0.50	0.66	1.0
$f(q)$	0.0345	0.097	0.134	0.166	0.229

Tab. 2.1 Werte der Funktion $f(q)$ für einige typische q .

Wird etwa konstante Viskosität in CVs angenommen (vgl. Bath&Pringle, 1985; Warner, 1987), so gilt die Relation $\Delta t_a \sim P^{4/3}$. Ein Vergleich mit der Abb.9 in Smak (1984a) zeigt, daß die Beobachtungsdaten ebensogut durch diese nichtlineare Ausgleichung (2.19), wie durch (2.17) dargestellt werden können. Für die absolute Größe der kinematischen Viskosität erhält man

$$\nu = 2.62 \cdot 10^{17} f(q) \left(\frac{M_1}{M_\odot}\right)^{2/3} \left(\frac{P}{d}\right)^{4/3} \left(\frac{\Delta t_a}{d}\right)^{-1} \text{ cm}^2/\text{s} \quad (2.20)$$

Mit einem mittleren $f(q) = .16$, $P = .25 d$, $\Delta t_a = 2 d$ und $M_1 = 1 M_\odot$ folgt $\nu = 3.3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2/\text{s}$.

Außer der Δt_a - P Relation kann auch die beobachtete Beziehung zwischen mittlerer Ausbruchsdauer und Bahnperiode (z.B. Szkody & Mattei, 1984) Rückschlüsse auf die Viskosität geben (Gieger, 1987). Sie erhält ebenfalls $\alpha = 0.2$. Nach Gleichung (2.13) ist dies für $T = 10^5 K$ und $H = 5 \cdot 10^8 \text{ cm}$ äquivalent mit $\nu = 3.16 \cdot 10^{14} \text{ cm}^2/\text{s}$.

Es sei noch abschließend erwähnt, daß auch die Standardscheibentheorie eine grobe Abschätzung von ν erlaubt. Nach Gl. (2.4) gilt mit $\Sigma = 2 H \rho$ (bei $r \gg R_*$)

$$\nu = \frac{\dot{M}}{6\pi H \rho}, \quad (2.21)$$

und mit $H \approx 5 \cdot 10^8 \text{ cm}$, $\rho \approx 10^{-6} \text{ g/cm}^3$ und $\dot{M} \approx 10^{18} \text{ g/s}$ folgt $\nu \approx 1.06 \cdot 10^{14} \text{ cm}^2/\text{s}$. Diese Abschätzungen ergeben einen Variationsbereich des kinematischen Viskositätskoeffizienten im Bereich $10^{14} \lesssim \nu \lesssim 5 \cdot 10^{15}$, wobei eine genauere Eingrenzung wegen der unsicheren Systemparameter nicht möglich ist. So sind z.B. die Werte auf der rechten Seite von Gl. (2.21) alle *keine* direkten Beobachtungsgrößen.

3 Die Grenzschicht von Akkretionsscheiben

3.1 Theorie

Nachdem im vorausgegangenen Kapitel die Struktur von Akkretionsscheiben erläutert wurde ohne detaillierte Berücksichtigung eines inneren Randes, soll dies nun nachgeholt werden. Da von der Scheibe bei Keplerrotation nur die Hälfte der maximal möglichen Akkretionsenergie freigesetzt wird und der Rest bei nichtrotierendem Weißen Zwerg in einer relativ kleinen Übergangszone, kommt dieser besondere Bedeutung zu. Als radiale Ausdehnung dieser sog. Grenzschicht (*Boundary layer*), kurz **BL** zwischen Scheibe und Weißen Zwerg wird üblicherweise der Punkt gewählt, an dem die radiale Ableitung der Winkelgeschwindigkeit verschwindet, also $\frac{\partial \Omega}{\partial R}(x) = 0$ gilt, wobei $x = R_* + d_{BL}$ ist (Abb. 3.1). Falls der Stern langsam rotiert, existiert immer ein solcher Punkt, weil die zirkulierende Materie auf Sternrotation abgebremst werden muß. Es wird i.a. angenommen, daß die BL-Dicke d_{BL} klein (einige Druckskalenhöhen) ist im Vergleich zum Sternradius, also $d_{BL} \ll R_*$ gilt. Die Winkelgeschwindigkeit fällt im Intervall $[R_*, R_* + d_{BL}]$ auf den Wert an der Sternoberfläche Ω_*^0 ab.

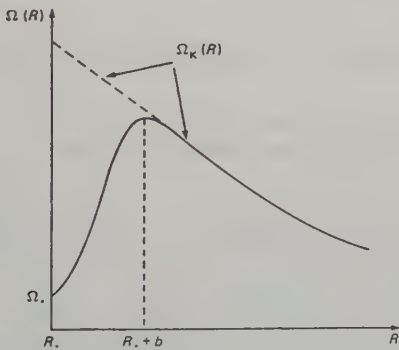


Abb. 3.1

Die Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit Ω vom Radius R bei unterkritisch rotierendem Stern. Der Punkt mit verschwindender Ableitung $(R_* + b)$ definiert die radiale Grenzschichtdicke b , die im Text mit d_{BL} bezeichnet ist (nach Frank *et al.*, 1985).

Entscheidend für die zu erwartende spektrale Verteilung der Leuchtkraft L_{BL} ($\approx \frac{1}{2} L_{acc}$) der Grenzschicht ist deren Struktur (Ausdehnung, Temperatur, etc.). Im folgenden werden nun einige der bisherigen Ansätze vorgestellt. Der einzige Übersichtsartikel von Relevanz ist hier der von Shaviv (1987).

3.1.1 Optisch dicke Grenzschicht

Die Ersten, die sich genauer mit dem Problem der BL befaßten, waren Lynden-Bell & Pringle (1974) in ihrer grundlegenden Arbeit über die Entwicklung von viskosen Scheiben. Unter der Annahme eines kalten Gases, d.h. unter Vernachlässigung des Druckterms in der Bewegungsgleichung, und einer konstanten kinematischen Viskosität ν erhalten sie

$$d_{BL} = \nu^{2/3} \left(\frac{GM_*}{R_*^2} \right)^{-1/3} \left(1 - \left(\frac{\Omega_*^0}{\Omega_*^k} \right)^2 \right)^{-1/3} \quad (3.1)$$

Dabei ist Ω_*^k die Keplergeschwindigkeit an der Sternoberfläche

$$\Omega_*^k = \left(\frac{GM_*}{R_*^3} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

Für die relative Dicke $X_{BL} := d_{BL}/R_*$ folgt dann unter Benutzung der Abschätzung $Re_c = 10^3 = \Omega_*^k R_*^2 / \nu$ für die turbulente Viskosität

$$X_{BL} = 10^{-2} \cdot \left[1 - \left(\frac{\Omega_*^0}{\Omega_*^k} \right)^2 \right]^{-1/3} \quad (3.3)$$

Man erkennt, daß Gl.(3.3) nur bei langsam rotierenden Zentralsternen gültig ist ($\Omega_*^k - \Omega_*^0 = 0$ im Nenner).

Bei schnellerer Drehung folgt aus der Bedingung, daß gerade außerhalb der BL die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe kleiner als der Wert für Korotation ist (d.h. $GM_*/(R_* + d_{BL})^3 < (\Omega_*^0)^2$)

$$X_{BL} > \left(\frac{\Omega_*^k}{\Omega_*^0} \right)^{2/3} - 1. \quad (3.4)$$

Wie zu erwarten, ist die Dicke der BL bei rascher Sternrotation wesentlich kleiner. Im Grenzfall $\Omega_*^k = \Omega_*^0$, also bei kritischer Rotation, existiert überhaupt keine Grenzschicht. Lynden-Bell & Pringle weisen darauf hin, daß obige Abschätzungen nur für konstantes ν gültig seien, sich aber daraus radiale Geschwindigkeiten größer als die turbulente Geschwindigkeit ($\approx$ Schallgeschwindigkeit) ergäben. Damit könne allerdings keine Information über die Anwesenheit eines inneren Randes nach außen gelangen. Eine Erniedrigung von ν in diesem Bereich (mit der Ausdehnung R_*) von der Form

$$(\Omega R - \Omega_*^0 R_*)(R - R_*)/\nu = Re_c \quad (\approx 10^3)$$

führt dann zu

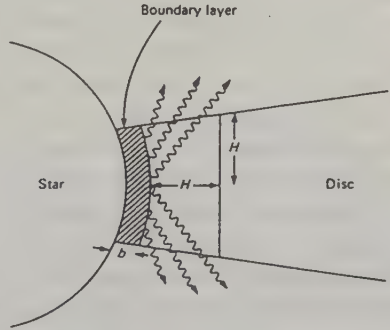
$$X_{BL} \approx Re_c^{-2} \approx 10^{-6}$$

anstelle von $X_{BL} \approx Re_c^{-2/3}$ (wie in Gl. 3.3). Diese Grenzschicht wäre also kleiner als die Skalenhöhe einer Sternatmosphäre ($\approx 10^{-5} R_*$ bei einem Weißen Zwerg mit $M_{WD} = 1 M_\odot$, $T_{WD} = 15000 K$), aber mit höherer Dichte und Temperatur.

Ein Kritikpunkt an obigen Überlegungen ist die Vernachlässigung des Gasdrucks, der sicherlich bei hohen Dichten und Temperaturen eine größere Rolle als in der Scheibe spielen wird. Darauf aufbauend hat Pringle (1977), die Standardscheibentheorie erweiternd, ein Modell einer optisch dicken BL entwickelt. Wie schon in den vorherigen Überlegungen wird auch hier die BL als Fortsetzung der Scheibe auf den Weißen Zwerg betrachtet (Abb. 3.2).

Abb. 3.2

Nichtmaßstabsgetreue Skizze der Grenzschicht in der Standardscheibentheorie (nach Frank et al., 1985).



Der Zentrifugalterm $u_k^2 = (GM_*)/r$ in der stationären radialen Impulsgleichung

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\phi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{u_k^2}{r}$$

kann in dem BL-Bereich nur durch $u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \sim u_r^2/d_{BL}$ oder $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \sim c_s^2/d_{BL}$ kompensiert werden, weil ja dort per definitionem $u_\phi \ll u_k$ gilt. Pringle nimmt nun wieder an, daß die Präsenz des Primärsterns nach außen kommuniziert werden muß, was eine radiale Einfallsgeschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit impliziert. Aus $|u_r| \ll c_s$ folgt mit $H/R_* = c_s/u_*^k$ (gilt allg. für dünne Scheiben; SS)

$$d_{BL} = \frac{H^2}{R_*}, \quad (3.5)$$

d.h. die Grenzschicht ist geometrisch dünn mit $X_{BL} = H/R_* \approx 10^{-2}$. Sei die abstrahlende Fläche $A = 2\pi R_* 2H$ (s. Abb. 3.2) und die BL optisch dick, so berechnet sich die zugehörige Schwarzkörpertemperatur aus

$$T_{BL}^4 = \frac{GM_* \dot{M}}{8\pi\sigma HR_*^2} = \frac{R_*}{H} T_D^4, \quad (3.6)$$

wobei T_D die charakteristische Scheibentemperatur ist (vgl. Gl. 2.6). Für typische Werte von $\dot{M} (\approx 10^{18} \text{ g/s})$ und $M_* = M_{WD} (\approx 1 M_\odot)$ ergibt dies Werte von $(2-5) \cdot 10^5 \text{ K}$. Der Hauptteil der Emission liegt somit für die optisch dicke BL, wie sie vor allem beim Ausbruch zu erwarten ist, im weichen Röntgenbereich (0.1 - 1.0 keV).

Das erste selbstkonsistente Modell der optisch dicken BL Struktur stammt von Regev (1983). Er entwickelt die Lösung für die Scheibe nach dem kleinen Parameter $\varepsilon = c_s/u_*^k \approx H/R_*$ ($\varepsilon = 1.37 \cdot 10^{-2}$ in seinem Beispiel). Eine solche Entwicklung ist im Übergangsbereich zwischen Scheibe und BL nicht anwendbar, weil der führende (Zentrifugal-) Term nicht verschwindet. Regev verwendet nun in diesem bei Grenzschichten typischen Fall die Methode der 'matched asymptotic expansions' an. Im inneren Bereich wird mit einer Koordinatenstreckung $r = 1 + \delta R$ gearbeitet, für die gilt $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Die innere Lösung wird an die äußere (wie z.B. $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \dots$, usw.) angepaßt, wobei nur Terme der 1. Ordnung mitberücksichtigt werden. Die niedrigste Ordnung ist durch die Shakura & Sunyaev-Lösung für den radiativen Bereich gegeben. Die Forderung, daß die Scheibe in der BL weiterhin dünn bleiben soll (also $u_\varphi > c_s$), führt zu der Bedingung eines nicht zu langsam rotierenden Zentralsterns $\Omega_* \gtrsim \varepsilon^{1/2} \Omega_k(R_*)$. Die Anpassung ergibt eine Lösung, die außen mit der SS-Lösung übereinstimmt, aber innen heißer und dichter ist. Weil die Temperatur dicht an der Sternoberfläche abfällt, ergibt sich ein nach innen gerichteter Strahlungsfluß mit $L_{in} \sim L_\odot$, der also durchaus die äußeren Schichten des WD stören kann. Als wichtiges Ergebnis findet Regev, daß die Leuchtkraft der Scheibe durch

$$L_D = \left(\frac{3}{2} - C \right) L_{acc} \quad (3.7)$$

gegeben ist, mit der Integrationskonstanten C , die sich aus der Anpassung der Lösungen ergibt. Aus energetischen Gründen ist $C > 1/2$, und für die Standardscheibe gilt $C = 1$. Dies ist aber inkonsistent mit der Anpassung der beiden Bereiche ($T = 0$ am inneren Rand, s.o.), und ein numerisches Beispiel mit $\dot{M} = 2.4 \cdot 10^{17} \text{ g/s}$ und $\Omega_*/\Omega_k = 0.3$ liefert $C = 0.61$. Wird dieses C z.B. in Gl. (3.7) gewählt, so ergibt sich bei bekanntem L_D (z.B. beobachtetem) ein geringeres $\dot{M}$ als üblicherweise, aber eine höhere Temperatur. Hervorzuheben ist, daß nicht für alle Parameter eine Lösung für die BL exi-

stiert. Speziell darf der Massenstrom nicht zu niedrig und die Sternrotation nicht zu langsam sein.

3.1.2 Optisch dünne Grenzschicht

Im Gegensatz zur bisher untersuchten optisch dicken BL betrachteten Pringle & Savonije (1979) die mögliche Generierung von harter Röntgenstrahlung durch Shocks im Fall einer optisch dünnen Grenzschicht. Die Postschocktemperatur ist bei starken Shocks durch

$$T_2 = \frac{3}{16} \frac{\mu m_H}{k} u_1^2 \quad (3.8)$$

gegeben (z.B. Frank *et al.*, 1985), wobei u_1 die Präshockgeschwindigkeit ist. Für $u_1 \approx u_k$ folgt für die maximale Temperatur, die durch starke Shocks in der Nähe eines Weißen Zwergs erzeugt werden kann,

$$T_s = \frac{3}{16} \frac{\mu m_H}{k} \frac{GM_*}{R_*}.$$

Da aber die Strömung stark turbulent ist mit großen Geschwindigkeitsgradienten, sind eher schwache Shocks zu erwarten. Pringle & Savonije (P & S) schlagen also einen Zweischrittmechanismus von schwachen zu starken Shocks vor. Ist die Kühlzeit (durch frei-frei Emission) t_{ff} größer als die adiabatische Expansionszeit t_{ad} , so expandiert das durch schwache Shocks erhitzte Gas in den Bereich von 'ungeschocktem' und verursacht starke Shocks, deren dissipierte Energie dann direkt als harte Röntgenstrahlung emittiert wird und eine heiße Korona bildet. Bei $t_{ff} \ll t_{ad}$ lagert sich das leicht 'geschockte' Gas langsam auf den WD ab, und man erhält wieder den optisch dicken Fall. Das diskriminierende Verhältnis von t_{ff} zu t_{ad} hängt nun vor allem vom Massenfluß ab. P & S finden für $\dot{M} \leq 10^{16} \text{ g/s}$ harte Röntgenstrahlung geringer Intensität von einer heißen Korona mit Temperaturen von $T_s \approx 2 \cdot 10^8 \text{ K}$ ($\approx 20 \text{ keV}$). Der umgekehrte Fall $\dot{M} > 10^{16} \text{ g/s}$ führt dagegen zur oben beschriebenen optisch dicken BL mit weicher Röntgenemission. Im Grenzfall $\dot{M} \approx 10^{16} \text{ g/s}$ erwarten P & S eine relativ starke harte Röntgenstrahlung aus einer BL dicht am Äquator.

An diesem Modell ist problematisch, daß keine bestimmte Geometrie spezifiziert wurde, sondern die Abschätzungen vor allem auf einer Energiebetrachtung beruhen. Bei starker Scherung, wie sie in der BL vorliegt, ist es schwierig starke stabile Shocks zu erzeugen. Außerdem strömt die ganze Akkretionsscheibe mit Überschall, so daß nicht nur in der BL Shocks zu erwarten sind.

Diese Einwände haben Tytenda (1981) zu einem Modell veranlaßt, bei dem die Ener-

giedissipation auch in optisch dünner BL durch Viskosität erzeugt und durch Bremsstrahlung (frei-frei Übergänge) emittiert wird. Unter den üblichen Voraussetzungen ($\frac{\partial}{\partial t}=0$, BL vertikal und radial dünn, Stern $\sim$ Zylinder, $u_r, u_z \ll u_\varphi$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$, $Re \approx 10^3$) findet er z.B. $d_{BL} = 5.6 \cdot 10^{-3} R_*$ und $T_{BL} = 5.7 \cdot 10^7 K$ als charakteristische Größen bei typischen Werten von $M_{WD} = 1 M_\odot$, $\dot{M} = 10^{15} g/s$. Wie vorher wird auch in diesem Modell bei kleinen Akkretionsraten ($\dot{M} \approx 5 \cdot 10^{15} g/s$) harte Röntgenstrahlung erwartet, und T_{BL} fällt mit steigendem $\dot{M}$. Bei kleinem $\dot{M}$ kann auch Energietransport durch Elektronenleitung wichtig werden. Die Näherungslösung der hydrodynamischen Gleichungen ist nicht so aussagekräftig, weil Tylanda z.B. $T=0$ bei $r=R_*+d_{BL}$, d.h. am äußeren Rand der Grenzschicht findet³⁾. Wichtig ist aber festzuhalten, daß beide Modelle für eine optisch dünne BL einer kleinen Akkretionsrate bedürfen und Temperaturen in der gleichen Größenordnung vorhersagen, wobei es gleich ist, ob die Energie durch Shocks oder Reibung dissipiert wird.

Eine Erweiterung der oben erwähnten *matched asymptotic expansions* Methode auf eine optisch dünne Grenzschicht für geringeres $\dot{M}$ ist von Regev & Hougerat (1988) kürzlich veröffentlicht worden. Bremsstrahlung ist der hauptsächliche Energieverlust und Elektronenstreuung dominiert die Opazität. In diesem Fall kann die Lösung analytisch angegeben werden für $\Omega(r)$, $T(r)$, $\Sigma(r)$, $u_r(r)$. Für ein Beispiel mit $\Omega_* = 1/3 \Omega_K$, $\dot{M} = 2 \cdot 10^{16} g/s$ liegt die maximale Temperatur mit $T_{max} \approx 10^{5.8} K$ deutlich unter den von Pringle & Savonije oder Tylanda angegebenen Werten. In den Regev'schen Modellen wird für die Viskosität $\nu = K u_\ell \Lambda$ verwendet, wobei $u_\ell \sim u_r$ ist und $\Lambda = \epsilon H$. In der Grenzschicht ist ν also recht klein, und die radiale Geschwindigkeit bleibt im Unterschallbereich.

3.1.3 Das Heiße Korona Modell

Vor allem, um die Röntgenbeobachtungen von SS Cyg (aber auch anderer Quellen) zu erklären, haben King & Shaviv (1984) das Modell einer heißen Korona entwickelt. Die Beobachtungen können wie folgt zusammengefaßt werden (Shaviv, 1987):

- i) SS Cyg emittiert harte Röntgenstrahlung in Ruhe. Im Ausbruch steigt der weiche Röntgenfluß, wohingegen der harte leicht abfällt.
- ii) Die harte Röntgenstrahlung fällt ohne Zunahme der intrinsischen Absorption ab.
- iii) Die harte Strahlung kann durch thermische Bremsstrahlung einer Temperatur T angepaßt werden, wobei die totale Röntgenleuchtkraft wie $L_x \sim T^a$ ($a \approx 3/2$) mit T korreliert.

Nach King & Shaviv können die beschriebenen Modelle von P & S und Tylanda die Fakten nur teilweise (i, iii) oder gar nicht (ii) erklären. Sie betrachten drei Zeitskalen

3) Dort führt auch die Standardscheibentheorie führt zu $T=0$ (vgl. Gl.2.6).

- t_{heat} = Zeitskala für viskose Heizung,
- t_{exp} = Zeitskala für hydrostatische Expansion,
- t_{rad} = Zeitskala für radiative Kühlung,

die alle Funktionen von ρ , d_{BL} und T sind, und konstruieren die sog. 'Heizungsebene' (vgl. Abb. 3.3).

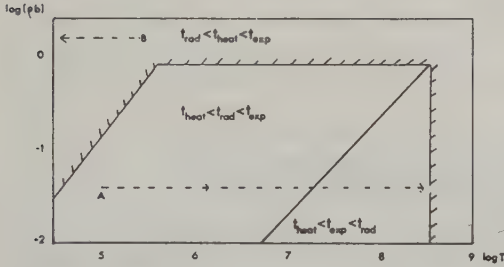


Abb. 3.3

Die Bereiche der verschiedenen Zeitskalen in der 'Heizungsebene'. Entlang der durchgezogenen Linien sind die entsprechenden Zeitskalen gleich. Gas, das ursprünglich im schraffierten Bereich liegt, heizt sich bis zu Röntgentemperaturen auf (nach King & Shaviv, 1984).

Es werde nun ein Massenelement mit $T \sim 10^5 \text{ K}$ ($\approx$ Temperaturen nahe der optisch dicken BL) mit genügend kleinem ρd_{BL} (Punkt A in Abb. 3.3) betrachtet. Weil t_{heat} die kleinste Skala ist, heizt es sich bis zur Virialtemperatur T_v des WD auf bei gleichzeitiger Expansion ($t_{\text{exp}} < t_{\text{rad}}$). Die vertikale Ausdehnung der sich bildenden Korona ist $H_v \sim .6 R_*$ und die radiale $H_r \sim .3 R_*$. Bei hohem $\dot{M}$ ist ρd_{BL} größer und nur wenig Materie wird aufgeheizt, womit die Fakten i) und ii) erklärt werden. Für die Korona kann analog ein Kühlungsebene konstruiert werden mit den zusätzlichen Zeitskalen

- t_{hyd} = Hydrodynamische Zeitskala,
- t_{cond} = Zeitskala für konduktive Kühlung.

Während der Kühlphase dominieren verschiedene Zeitskalen, aber es ergibt sich immer $L \sim T^\gamma$ mit variierendem γ (King & Shaviv). Am längsten dauert nun die (letzte) Phase der hydrostatischen Kühlung mit $L \sim T^{3/2+2\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ und klein), womit auch Punkt iii) der Beobachtungen erklärt wäre. Dieser Abfall folgt immer, wenn das röntgenstrahlung-emittierende Gas eine Korona um den WD bilden kann, also z.B. auch im Modell von P & S.

3.1.4 Durchmischung mit Sternmaterie

Ein weiteres wichtiges Problem bei Scheibenakkretion auf einen WD ist die Frage, inwieweit sich akkretiertes Gas mit der Sternmaterie durchmischen kann, und wie es sich auf der Oberfläche bzw. in der Hülle des Primärsterns verteilt. Die Beobach-

gen von Novae (speziell die Anreicherung der Nova Hüllen mit schweren Elementen, s.u.), als deren Ausbruchmechanismus heute ein thermonuklearer *Runaway* von frisch akkretierter Materie auf einer WD-Oberfläche angesehen wird, haben Kippenhahn & Thomas (1978) zu dem Modell eines äquatorialen Ringes veranlaßt. Sie nehmen an, daß sich die Scheibenmaterie wegen der Zentrifugalkräfte nicht zum Pol hinaufbewegen kann. Die Viskosität sei zu klein ($\eta \sim 100 \text{ g/(cms)}$) und die damit verbundenen Zeitskalen zu lang ($t_v \sim 25 \cdot 10^6 \text{ yr}$), als daß sich Sphärizität in Akkretions- bzw. Novaausbruchszeitskalen ($\sim 10^4 \text{ yr}$) einstellen könnte. Sie betrachten also eine Scherinstabilität zwischen dem Weißen Zwerg und der schnell rotierenden wasserstoffreichen Scheibenmaterie. Auf der Basis marginaler Stabilität leiten sie aus dem Richardson-Kriterium

$$Ri = \frac{\text{Arbeit gegen Auftriebskräfte}}{\text{kin. Energie der Turbulenz}} \approx \frac{1}{4}$$

ab, daß sich ein äquatorialer Gürtel bildet, der sich bis zu einer Breite von etwa 21° erstreckt.

Mac Donald (1983) hat Wachstumsraten von instabilen Störungen in den Oberflächenschichten eines akkretierenden Sterns berechnet. Er findet eine rasche Ausbreitung der akkretierten Materie über die ganze Sternoberfläche mit einer quasi-sphärischen Verteilung. Die dissipierte Rotationsenergie wird hier durch den WD akkretiert und im Gegensatz zu Kippenhahn & Thomas über die ganze Oberfläche wieder abgestrahlt.

3.1.5 Zeitabhängige Rechnungen

Erste zeitabhängige Rechnungen wurden kürzlich von Papaloizou & Stanley (1986, PS) durchgeführt. Sie lösen dabei die **1-D** hydrodynamischen Gleichungen (wieder über die vertikale Richtung integriert) unter der Annahme einer polytropen Zustandsgleichung $p = k \Sigma^{1+1/n}$ und einer erweiterten α -Viskosität (Gl. 2.13). Da aber in der Grenzschicht die radiale Druckskalenhöhe $H_p = -\rho \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{-1}$ mit dem Wegfall des zentrifugalen Gleichgewichts sehr viel kleiner wird, setzten PS hier H_p anstelle von H (Scheibendicke) als Turbulenzlänge ein. Als Ergebnis erhalten sie eine dünne BL, in der die Oberflächendichte Σ und die radiale Einfallgeschwindigkeit $|u_r|$ stark ansteigen. Für einige Viskositätsparameter wird $|u_r| > c_s$ im Gegensatz zu obigen Plausibilitätsüberlegungen einer in diesem Fall fehlenden Kommunikation zwischen BL und Scheibe. Ein weiteres Ergebnis der Modellrechnungen sind Oszillationen kleiner Amplitude außerhalb des Hauptdissipationsbereichs, die zu geringer Modulation der Energieabgabe führen. Nach PS können möglicherweise mit diesem Mechanis-

mus die beobachteten quasi-periodischen Oszillationen kleiner Amplituden erklärt werden.

Da die bisher vorgestellten BL-Modelle vielfach grobe Näherungen und Abschätzungen enthalten (so werden z.B. fast ausschließlich eindimensionale Strukturen berechnet), ist in jüngerer Zeit mit **2-D hydrodynamischen** Rechnungen begonnen worden. Robertson & Frank (1986, ab jetzt RF) haben die zeitliche Entwicklung von dicken Tori unter dem Einfluß von Reibung untersucht. Der Torus breitet sich aus (s.a. Lynden-Bell & Pringle, 1974) und hüllt am inneren Rand den zentralen Stern völlig ein. Kley & Hensler (1987a,b) haben die Entwicklung einer Keplerscheibe in der Nähe des Weißen Zwergs genauer untersucht. Die Rechnungen unterscheiden zwei Grenzfälle. Wird die dissipierte Energie instantan freigesetzt, liefert sie also keinen Beitrag zur inneren Energie (adiabatischer Fall), so bestätigen die Rechnungen für den Bereich der Scheibe einige Ergebnisse der Standardtheorie (geometrisch dünn, konkav, keplersch rotierend). In Sternnähe ($r \approx 1.4 R_*$) weitet sich die Scheibe aus und bildet eine sphärische dichte Hülle (Abb. 3.4), von den Autoren als Grenzschrift bezeichnet, um den WD in Übereinstimmung mit RF. Die Ausdehnung ähnelt der Korona von King & Shaviv.

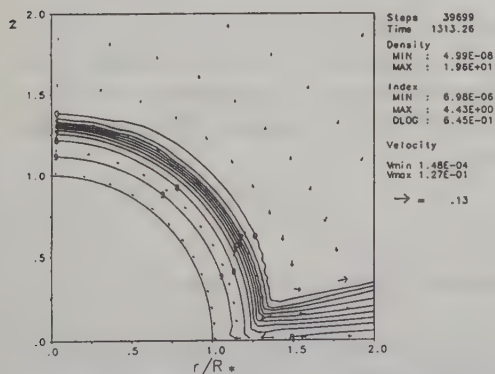


Abb. 3.4

Die Grenzschriftstruktur in den 2-D-Rechnungen von Kley & Hensler (1987). Eingezeichnet sind die Linien gleicher Dichte (Indizes in aufsteigender Ordnung) und die Richtung der Geschwindigkeit.

Als Variation des ansonsten festen, undurchlässigen inneren Randes ('no-slip boundary') wurden Modelle mit unterschiedlicher Rotation des Zentralobjektes gerechnet. Dabei hat sich gezeigt, daß erst eine höhere Rotationsgeschwindigkeit als etwa $\approx 50 \% \Omega_K(R_*)$ einen deutlichen Einfluß auf die Geometrie der Grenzschrift

(Abplattung an den Polen, elliptische Form) hat. Modelle, bei denen die gesamte dissipierte Energie ohne Abstrahlungsmöglichkeit in innere umgesetzt wird ('trapped energy'), lieferten eine sehr dicke Scheibe mit Ω deutlich kleiner als Ω_k und ohne ausgeprägte Grenzschicht. Generell läßt die Nichtkonsistenz in der Energiegleichung (ohne Transportprozess oder Kühlung) aber keine weiteren Aussagen z.B. bzgl. der Temperaturen in der BL oder über eine mögliche Aufheizung des WD zu. Einen Hinweis auf eventuelle bipolare Strukturen (Jets, Winde) haben die bisherigen Modelle von RF und KH nicht ergeben.

3.1.6 Winde und Weiße Zwerge

Pringle (1988) untersuchte die Aufheizung eines WD in einem (sphärischen) Wärmehaube. Nach seinen Rechnungen kann eine BL mit einer Temperatur von etwa $10^6 K$ zu einer deutlichen Aufheizung des Sterns auf Zeitskalen der Ausbruchsintervalle führen.

Um die Strömung des Gases oberhalb der Scheibe in der Nähe des Zentralobjekts zu berechnen, verfolgt Icke (1980) die Bewegung des Gases unter dem Einfluß der Strahlungsbeschleunigung. Für Super-Eddingtonleuchtkräfte⁴⁾ findet er einen stetigen Abstrom von Materie entlang der Symmetrieachse (Rotationsachse des WD) der Scheibe

Torbett (1984) dagegen nimmt an, daß die Temperatur in der Grenzschicht durch Schocks stark ansteigt (auf einige $10^8 K$ für WD) und es zur bipolaren Ejektion von Materie kommt, die durch Gasdruck getrieben wird. Der Massenfluß ist dann etwa $\dot{M}_W \approx 3.5 \cdot 10^{-10} M_\odot / yr$, was etwa dem 10^{-2} bis 10^{-1} fachen der Akkretionsrate entspricht.

4) Die Eddingtonleuchtkraft ist der Grenzfall, in dem Strahlungs- und Gravitationsbeschleunigung gleich sind. Zur Berechnung der Strahlungskraft wird dabei nur Thomsonstreuung berücksichtigt.

3.2 Relevante Beobachtungen

Die beschriebenen theoretischen Überlegungen zur BL lassen einen Großteil der freigesetzten Energie im hochenergetischen Teil des Spektrums (Röntgenstrahlung, UV) erwarten. Wegen der starken bis totalen atmosphärischen Absorption in diesem Wellenlängenbereich ($\approx 8\text{--}1200 \text{ \AA}$) sind Satelliten- bzw. Ballonbeobachtungen oberhalb der Lufthülle unumgänglich. Nach einigen frühen Beobachtungen mit verschiedenen Röntgensatelliten von *UHURU* bis *HEAO* (siehe Referenzen in Cordova & Mason, 1984) haben vor allem in den letzten Jahren die Beobachtungsdaten von CVs im Röntgenbereich durch das *Einstein X-ray Satellite Observatory* und dem *EXOSAT Observatory* deutlich zugenommen. Im UV haben vor allem der *IUE (International Ultraviolet Explorer)* Satellit und im FUV die *Voyager* Raumsonden viel Datenmaterial geliefert. Die Empfindlichkeitsbereiche (Wellenlänge) einiger Satelliten sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Satellit	Filter/Detektor	Energiebereich/Wellenlänge
HEAO		0.18 - 2.8 keV
Einstein	IPC	0.1 - 4.5 keV
EXOSAT	ME	2 - 20 keV
	LE	0.04 - 2.0 keV
Voyager		500 - 1200 $\text{\AA}$
IUE	SWP	1150 - 1950 $\text{\AA}$
	LWP	1950 - 3200 $\text{\AA}$
ROSAT (geplant)		0.1 - 2 keV

Tab. 3.1 Einige Daten von UV- und Röntgensatelliten

In den folgenden Abschnitten werden kurz die wichtigsten für die BL-Struktur relevanten Beobachtungsdaten zusammengetragen. Es werden dabei nur unmagnetische WDs berücksichtigt, also z.B. keine AM Her oder DQ Her-Systeme.

3.2.1 Allgemeine Röntgenbeobachtungen

Die Röntgenbeobachtungen von CVs sind vor allem in den Reviews von Cordova & Mason (1983, 1984), Patterson & Raymond (1985a,b) über die *Einstein* Daten und in Mason (1985) über *EXOSAT* zusammengefaßt worden. Etwa 70% aller CVs sind von

Einstein im 0.1-4.5 keV Band beobachtet worden mit einer Sensitivitätsgrenze von $10^{29} (d/100 \text{ pc}) \text{ erg/s}$. Die Mehrzahl der CVs haben ein relativ hartes ($kT > 2 \text{ keV}$ bei einem thermischen Bremsstrahlungsmodell) Röntgenspektrum, s. Cordova & Mason (1984). Das Verhältnis von Röntgen-Fluß F_x (0.1-4.0 keV) zu optischem F_v (5000-6000 Å) liegt im allgemeinen etwa bei 1.0 mit einer oberen Grenze bei 4.0. Patterson & Raymond weisen auf die starke Korrelation zwischen den Observablen F_x/F_v und der Äquivalentbreite der H_β Emissionslinie hin

$$\log(F_x/F_v) = -2.21 + 1.45 \log EW(H_\beta). \quad (3.9)$$

Also haben Systeme mit starken Linien, d.h. mit ausgedehntem optisch dünnen Scheibenbereich, $F_x/F_v \approx 3$. Bei schwachen Linien (optisch dicke Scheibe) führt Gl. (3.9) zu $F_x/F_v \approx 0.03$. Wie oben erwähnt, gehören optisch dünne Scheiben zu kleinem $\dot{M}_D$ (Ruhe) und optisch dicke Scheiben zu großem $\dot{M}_D$ (Ausbruch), so daß in Ruhe ($\dot{M}_D \approx 10^{16} \text{ g/s}$) $F_x/F_v \approx 1-3$ gilt und im Ausbruch ($\dot{M}_D \approx 10^{18} \text{ g/s}$) $F_x/F_v \approx 0.03-0.06$. Dies liegt vor allem daran, daß im Ausbruch die visuelle Helligkeit stark ansteigt, F_x aber weitgehend konstant bleibt oder leicht abfällt (Cordova & Mason, 1983).

Eine direkte Korrelation von F_x mit $\dot{M}_D$ gibt es dagegen nach Patterson & Raymond nicht. Sie werten dies als Hinweis, daß zwar im optisch dünnen Fall ($\dot{M}_D \lesssim 10^{16} \text{ g/s}$) die harte Röntgenstrahlung mit den theoretischen Modellen (Pringle & Savonije, 1979; Tylenda, 1981) im Einklang ist, dagegen im optisch dicken Fall wesentlich größer als erwartet sei. Als Ausweg postulieren sie ein Gebiet mit geringer Dichte und hohen Temperaturen (Korona) oberhalb der Scheibe (und BL), das die harte Röntgenstrahlung produziert und in Form und Ausdehnung relativ unabhängig von der Akkretionsrate ist. Die Beobachtungen von SS Cyg (King *et al.*, 1985; siehe oben), weisen ebenfalls auf eine heiße Korona hin, die gut mit dem Modell von King & Shaviv (s.o.) erklärt wird.

Eine eventuell zu erwartende Korrelation von F_x/F_v mit der Masse des Weißen Zwerges (für die Massen siehe Ritter, 1987) ist nicht beobachtet worden, wohl aber eine inverse Relation mit der Bahnperiode. Je kleiner P_{orb} , um so größer ist F_x/F_v . Cordova & Mason betrachten dies als Hinweis auf einen möglichen Ursprung der Röntgenstrahlung von einer Korona um den Sekundärstern.

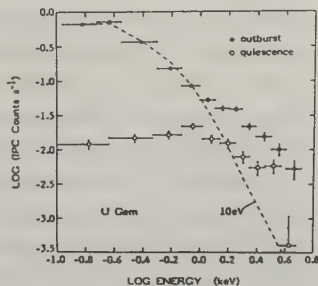
3.2.2 Weiche Röntgenstrahlung

Bis vor wenigen Jahren ist nur bei zwei Systemen (U Gem, SS Cyg) von über 100 beobachteten Kandidaten eine stark erhöhte weiche Röntgenstrahlung während des Ausbruchs gefunden worden. Bei diesen Systemen steigt beim Ausbruch der 0.18-0.5

keV Fluß (F_{sx}) um einen Faktor 100 an (Cordova & Mason, 1984). Das Spektrum von U Gem (Abb. 3.5) zeigt, daß der weiche Röntgen-Anteil gut durch ein Schwarzkörperspektrum von 10 eV ($\approx 10^5 K$) approximiert werden kann, was im Prinzip mit der Vorhersage einer im Ausbruch optisch dicken BL übereinstimmt (Pringle, 1977).

Abb. 3.5

Röntgenspektrum von U Gem in der Ausbruchs- (*) und Ruhephase (o) aufgenommen mit dem EINSTEIN Satelliten (nach Cordova & Mason, 1984).



Auch für SS Cyg zeigen Rechnungen von Tylanda (1977) eine gute Übereinstimmung mit einer optisch dicken BL. Problematisch sind dagegen die restlichen Systeme, die offensichtlich ein viel zu geringes F_{sx} zeigen.

Angesichts dieser Probleme sprachen Ferland *et al.* (1982) von der 'Mystery of the Missing BL'. Sie trugen die beobachteten Werte von L_{sx}/L_{opt} über L_{opt} auf und verglichen dies mit den Vorhersagen einer optisch dicken BL. Dabei werden Sternmasse ($M_{WD}=1 M_{\odot}$) und Sternradius ($R_{WD}=5 \cdot 10^8 cm$) festgehalten aber $\dot{M}$ und der Anteil f_{BL} des WD, der von der BL bedeckt wird, variiert. Sie finden für übliche $\dot{M}$ und $f_{BL} \approx 10^{-2.5}$ (Pringle, 1977), daß L_{sx} etwa 2 bis 4 Größenordnungen schwächer ist, als theoretisch zu erwarten wäre. Als Ausweg aus dem Dilemma erwägen sie absorbierendes Gas im System, größere interstellare Absorption ($N_H \approx 10^{20} cm^{-2}$), oder eine andere Geometrie der BL (größeres f_{BL}). Jensen (1974) hat aufgrund des HEAO-Surveys, in dem bei 102 Novae keine Röntgenstrahlung im (1.8-2.8 keV)-Bereich gefunden wurde, ebenfalls argumentiert, daß bei einer typischen BL mit $kT \approx 15-30 keV$ die weiche Röntgenstrahlung durch zirkumstellares Gas absorbiert würde. Burkert & Hensler (1985) haben den Einfluß der Geometrie untersucht. Sie betrachten eine ellipsoide Form der BL, die den ganzen WD umhüllt (also ein stark vergrößertes f_{BL}), und können dadurch die F_{sx}/F_{opt} vs. F_{opt} -Relation der Beobachtungen besser wiedergeben. Sie weisen auch auf die Möglichkeit einer falschen Entfernungsbestimmung für einige Systeme hin.

Patterson & Raymond (1985b) greifen erneut dies Mysterium auf und behaupten, die

beobachtete Strahlung sei ganz und gar nicht inkonsistent mit der Theorie, sondern im Gegenteil eher eine Bestätigung derselben. Sie argumentieren, daß in den vorherigen Abschätzungen (wie Ferland *et al.*, 1982) zunächst M_{WD} und T_{BL} zu hoch angesetzt wurden, und weiterhin die interstellare Absorption nicht ausreichend berücksichtigt wurde. Zieht man dies in Betracht, so finden Patterson & Raymond, daß genau 2 Systeme (nämlich U Gem, SS Cyg) die notwendigen Bedingungen (hohes $\dot{M}$, M_{WD} , kleines d) für eine Beobachtbarkeit erfüllen.

In neueren Beobachtungsreihen mit EXOSAT sind einige nicht-magnetische Systeme auf möglichen weichen Röntgenfluß untersucht worden. Nur die SU UMa-Systemen OY Car und VW Hyi sind dabei als starke weiche Röntgenstrahler während Superausbrüchen identifiziert worden (van der Woerd, 1987). Die SX-Lichtkurve (*Soft X-rays*) von OY Car (im Visuellen bedeckend, $i = 83^\circ$) zeigt keinerlei Bedeckung. Diese Tatsache, zusammen mit dem *Softness-Ratio* (harter zu weicher Röntgenstrahlung) von 0.4 ($\Rightarrow T \approx 1.5 \cdot 10^5 K$) wird erneut als Hinweis auf eine heiße, optisch dünne Korona gewertet. Auch die Beobachtungen von VW Hyi lassen sich nach Van der Woerd am besten durch eine ausgedehnte Korona erklären. Die SX-Lichtkurve von U Gem zeigt zwei ausgeprägte *Dips* (relative Minima) pro Umlauf (Osborne, 1987). Die im zentralen Bereich der Akkretionsscheibe entstehende Röntgenstrahlung wird

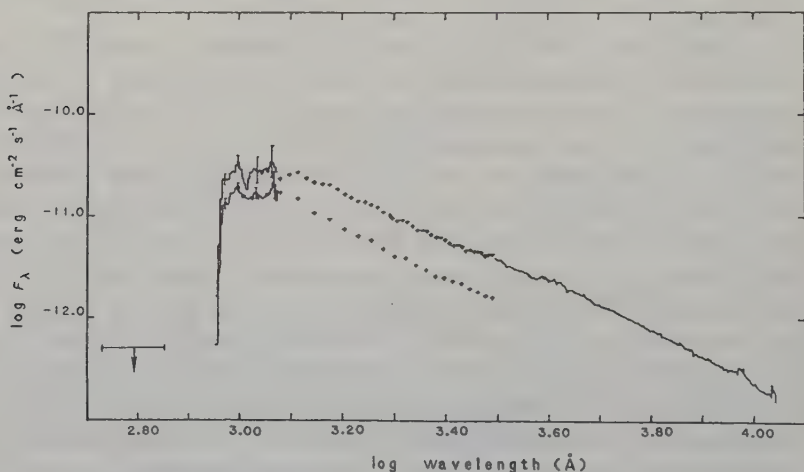


Abb. 3.6

Aus Voyager (Kurve mit Fehlerbalken für $\log \lambda \lesssim 3.1$), IUE (Kreuze) und visuellen (ab $\log \lambda \approx 3.5$) Beobachtungen zusammengesetzte Spektren von SS Cyg (oben) und U Gem (unten) (nach Polidan & Holberg, 1984).

hier, wie bei den LMXBs, durch die Aufweitung der Scheibe am Auftreffpunkt des Massenstroms vom Sekundärstern (dem *Hot-Spot*) bedeckt.

3.2.3 FUV Beobachtungen

Die Ultraviolett-Spektrometer an Bord der beiden Voyager-Sonden haben eine Beobachtung von CVs im Bereich $500\text{--}1200\text{ \AA}$ ermöglicht. Als erste Systeme wurden erneut die beiden CVs SS Cyg und U Gem untersucht (Polidan & Holberg, 1984). In der Ruhephase wurde dabei nur bei SS Cyg ein messbarer Fluß registriert, aber im Ausbruch zeigen beide einen sehr ähnlichen Spektrumsverlauf (Abb. 3.6). Der FUV-Bereich ($\approx 1175\text{ \AA}$) hat einen substantiell flacheren Verlauf ($F_\lambda \sim \lambda^{-0.5}$) als der IUE-UV-Bereich ($F_\lambda \sim \lambda^{-2.3}$), vgl. Abb. (3.6). Jenseits der Lyman-Kante ($\lambda = 912\text{ \AA}$) fällt der Fluß praktisch auf Null ab. Polidan & Holberg betonen, daß die Änderung des Spektralindex kein Artefakt der Flußkalibrierung sei, und nehmen als Ursache der Änderung *Line-Blocking* im inneren Teil der Akkretionsscheibe an. Ein Vergleich dieser CV-Spektren mit solchen von anderen Objekten zeigt eine große Ähnlichkeit in Steigung und Form mit einem WD von etwa $5 \cdot 10^4\text{ K}$, auf jeden Fall sei $T < 7 \cdot 10^4\text{ K}$ (Polidan & Holberg, 1984). Sie schließen auf eine BL-Struktur, die deutlich verschieden von dem optisch dicken Modell von Pringle sei. SS Cyg zeigt ferner Linien der Lyman-Serie.

Die Beobachtungen weiterer CVs (Polidan & Carone, 1987) im FUV zeigen ausnahmslos ebenfalls ein flaches Kontinuum und praktisch verschwindenden Fluß im EUV jenseits der Lyman-Kante. Alle Systeme haben Absorptionslinien bei $975\text{ \AA}$ und $1030\text{ \AA}$ (O VI/Ly β bzw. C III/Ly γ). Die fehlgeschlagenen Versuche, die FUV-Spektren der CVs durch eine Kombination von Sternatmosphärenmodellen und/oder einem Schwarzkörper-Scheibenspektrum anzupassen (Carone *et al.*, 1987), machen die Notwendigkeit von detaillierten Modellen deutlich.

3.2.4 P Cyg Profile

Während bzw. wenige Tage nach Ausbruchmaximum zeigen mehrere Systeme starke P Cyg Linienprofile vor allem in den Resonanzlinien C IV, N V und Si IV (z.B. Klare *et al.*, 1982; Cordova & Mason, 1982; Szkody, 1985), wie sie charakteristisch für Massenverlust sind. Die abgeleiteten Endgeschwindigkeiten liegen mit $3000\text{--}5000\text{ km/s}$ im Bereich der Entweichgeschwindigkeit eines WD und weisen auf einen Ursprung in dessen Nähe hin (Kallman, 1983). Trotz bestehender Unterschiede der Profile im Vergleich zu Einzelsternen haben verschiedene Autoren (Klare *et al.*, 1982; Cordova & Mason, 1982) sphärisch symmetrische Massenverlustraten von $10^{-12}\text{--}10^{-10}$

$M_{\odot}/\text{yr}$ abgeleitet, was etwa dem 10^{-3} - 10^{-2} fachen Wert der Scheibenakkretionsrate entspricht. Große Probleme bereitet die Erklärung der beobachteten Ionisationszustände (Kallman, 1983). Trotz unterschiedlicher Anregungspotentiale von Si^{3+} , C^{3+} und N^{4+} sind bei einigen Systemen die entsprechenden Linien gleichzeitig gesättigt (z.B. Drew & Verbunt, 1985). Kallman & Jensen (1985) haben als simultane Lösung dieser Windprobleme und des Soft X-ray Problems der BL einen optisch dicken Wind, der undurchlässig für weiche Röntgenstrahlung ist, vorgeschlagen.

Die Tatsache, daß bei Systemen mit hoher Inklination i.a. keine P Cyg Profile zu beobachten sind (z.B. Szkody, 1985; und Referenzen dort), und die erwähnten Abweichungen von üblichen Profilen haben viele Autoren veranlaßt, eine konische Windgeometrie (symmetrisch zur Rotationsachse der Scheibe) anzunehmen. Allerdings weisen Mouche & Raymond (1987) darauf hin, daß bei Berücksichtigung einer Randverdunklung der Scheibe bei der Berechnung des treibenden Kontinuums ein sphärisches Modell vollkommen mit den Beobachtungen konsistent ist, wenn der Wind nur langsam beschleunigt wird. Zur Erklärung der Ionisationsstrukturen schlagen sie inhomogene Winde vor.

Die Nichtbedeckung der Windlinien in bedeckenden Systemen (Drew & Verbunt, 1985) weisen auch auf einen ausgedehnten Bereich der Linienentstehung hin. Kürzlich haben Drew & Verbunt (1987) mit der Bahnperiode variierende Strukturen der Profile beschrieben.

3.2.5 Temperaturen der Weißen Zwerge

Verschiedene Beobachtungen (IUE, opt. Kontinuum, Bedeckungsgeometrie, etc.) haben zur Entdeckung des heißen Kontinuums der WD-Oberfläche geführt (Smak, 1984b und Sion, 1986, 1987; und Referenzen darin). Mit Annahmen über R_* , d und theoretischen Flußverteilungen aus Modellatmosphären bei großer Schwerkraft kann durch Vergleich mit dem beobachteten Fluß f_{ν} eine Temperatur T_{eff} und die Gravitationsbeschleunigung g abgeleitet werden. Mit $4.1 \leq \log T_{\text{eff}} \leq 4.9$ bei mittleren Werten von 25000-30000 K liegen die Temperaturen deutlich über dem Mittelwert für Einzel-Weiße Zwerge (12000 K). Als möglicher Mechanismus zur Erklärung bieten sich z.B. eine durch Reprozessierung von Röntgenstrahlung aufgeheizte Pseudophotosphäre (Patterson & Raymond, 1985a) oder einfach wieder abgestrahlte Akkretionsenergie nach Verteilung auf der WD-Oberfläche (Shafter *et al.*, 1985) an. Daher wären Korrelationen zwischen T_{eff} und M_{WD} oder T_{eff} und $\dot{M}$ zu erwarten. Smak (1984b) findet auch eine positive Korrelation der Leuchtkraft des Pseudo-WD mit der mittleren Akkretionsrate ($\dot{M}_{\text{ave}}$). Aus der Darstellung von $T_{\text{eff}}-P_{\text{orb}}$ folgt die Tendenz, daß kühlere WD bei kürzeren Perioden liegen. Wenn $\dot{M}_{\text{ave}}$ von P_{orb} abhängt, dann ist eine

solche Korrelation auch zu erwarten.

Beobachtungen von CVs zwischen den Ausbrüchen zeigen bei einigen Systemen (wie VW Hyi, WX Hyi) einen in der Ruhephase abfallenden IUE-Fluß (z.B. Pringle *et al.*, 1987), und haben Pringle dazu veranlaßt, die Aufheizung (und Abkühlung) eines WD bei Akkretion zu untersuchen. Um Weiße Zwerge in den typischen Ausbruchszeitskalen genügend aufzuheizen, bedarf es Temperaturen um 10^6 K. Diese können eventuell in der BL erzeugt werden. Allerdings ist nicht klar, ob die ganze oder nur Teile der WD-Oberfläche erhitzt werden. In den Ruhephasen kühlt der WD langsam ab, womit die beobachteten Trends z.B. in der IUE-Lichtkurve erklärt wären.

3.2.6 Nova Hüllen

Oft zeigt sich bei direkten Aufnahmen der bei Novaausbrüchen ausgeworfenen Hüllen deutliche Nichtsphärizität. Es existieren sog. *polar blobs* (Verdichtungen entlang der Polachse) und äquatoriale Ringe. Auch die Analysen der Nebemissionslinien lassen darauf schließen (siehe Referenzen in Kippenhahn & Thomas, 1982 und in MacDonald, 1983). Diese Abweichung von der sphärischen Symmetrie kann z.B. durch Wechselwirkungen der expandierenden Schale mit der Akkretionsscheibe oder der anderen Doppelsternkomponente, mit Magnetfeldern, oder durch einen nicht-sphärischen TNR erzeugt werden (MacDonald, 1983), wobei das Problem heute noch ungeklärt ist. Die starke Anreicherung der Novaschalen mit schwereren Elementen legen Mischungsprozesse der Scheibe mit prozessiertem Material des WD nahe.

3.3 Die Zielsetzung der Arbeit

Den bisherigen Arbeiten zur Grenzschnittstruktur haftet zum einen der Mangel an, daß nur die eindimensionale radiale Struktur berechnet wird, dann allerdings teilweise schon selbstkonsistent unter Einbeziehung von Energietransport, zum anderen fehlt bei den bisherigen notwendigen zweidimensionalen Ansätzen der Energietransport völlig.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine numerische Methode zu entwickeln, in der ein konsistenter Energietransport durch Strahlung mitberücksichtigt wird. Damit soll die Struktur der Grenzschnitt in CVs untersucht werden.

Als Hauptproblem gilt es, die Temperaturverteilung der optisch dicken Grenzschnitt während des Ausbruchs bei hohen Massentransferraten zu studieren, um eine verbesserte Interpretation der beobachteten Spektren zu ermöglichen.

Weiterhin soll mit den Modellen genauer die geometrische Ausdehnung der Grenzschnitt untersucht werden.

4 Die Gleichungen der Strahlungshydrodynamik

4.1 Vorbemerkungen

In der Behandlung der Ausbreitung von elektromagnetischer Strahlung in bewegten Medien werden vor allem zwei ausgezeichnete Bezugssysteme verwendet, das mitbewegte System (*comoving frame*) und das Laborsystem. Beide Formalismen haben, wie im folgenden kurz umrissen wird, ihre besonderen Vor- und Nachteile (siehe auch die Diskussion in Mihalas & Mihalas (1984), von nun an MM, oder in Mihalas & Klein (1982)).

Das mitbewegte System ist identisch mit dem sog. Lagrangeschen Bezugssystem in der Hydrodynamik; es bewegt sich simultan mit der Gas- (bzw. Flüssigkeits-) strömung, ist aber wegen der auftretenden Beschleunigungen kein Inertialsystem. Weil in diesem System das Medium lokal in Ruhe ist, sind die atomaren Prozesse wie Absorption und Emission isotrop, und auch die Streuterme können leicht behandelt werden. Allerdings sind die Gleichungen recht kompliziert (z.B. Buchler 1979, 1983) und wurden nur in eindimensionalen Fällen gelöst (z.B. Winkler *et al.*, 1984).

In mehrdimensionalen Problemen mit möglicherweise komplizierten Geschwindigkeitsfeldern wird vorzugsweise das Laborsystem (in der Hydrodynamik auch als Eulersche Formulierung bezeichnet) verwendet. Die Gleichungen werden dadurch, daß die radiativen Größen nun im (inertialen) Laborsystem gemessen werden, etwas einfacher, Dopplerverschiebung und Aberration führen jedoch zu einer starken Anisotropie der atomaren Strahlungsprozesse.

Eine Alternative zu diesen Ansätzen ist eine gemischte (*mixed-frame*) Formulierung. Dabei werden die Größen des Strahlungsfeldes (wie Energie, Fluß, Intensität) im Ruhesystem gemessen, Absorptivitäten und Emissivitäten aber im mitbewegten System (siehe z.B. Hsieh & Spiegel (1976), von nun an HS). Diese kombinierte Methode beseitigt einige der obigen Schwierigkeiten, weil die einfachere Eulersche Form der Gleichungen bei isotroper Absorption und Emission beibehalten wird. 'Nur' Streuung und Linienstrahlungstransport bleiben problematisch. Diese Methode ist für den eindimensionalen Fall von Mihalas & Klein (1982) entwickelt worden.

Da der Schwerpunkt dieser Arbeit die Untersuchung der Wechselwirkung des inneren Teils der Akkretionsscheibe mit den äußeren Teilen der Atmosphäre des zentralen Weißen Zwergs ist, liegt das Hauptaugenmerk auf dem dynamischen Einfluß des Strahlungsfeldes auf das Stömungsprofil. Aus diesen und numerischen Gründen wurde das Problem entscheidend vereinfacht, indem **nur** mit den **frequenz-integrierten** Momentengleichungen gearbeitet und nicht die Transportgleichung (für

die Strahlungsintensität) gelöst wird. Die Lösung der vollständigen zeitabhängigen Hydrodynamik simultan mit winkel- und frequenzabhängigem Strahlungstransport ist mit den momentanen Computerkapazitäten nicht möglich. (Im achsialsymmetrischen, zeitabhängigen Fall ist die Intensität eine Funktion von 6 Variablen). Yorke (1986) gibt eine gute Diskussion über die Möglichkeiten und Probleme eines multidimensionalen Strahlungstransports.

Der Linientransport kann Teil einer weitergehenden Untersuchung zur Entstehung und Theorie der (beobachteten) Winde in CVs sein, weil diese durch den Strahlungsdruck in den Linien getrieben werden.

Als weitere Approximation wird zunächst im zweidimensionalen Fall die flußbegrenzte Diffusion (*Flux-limited diffusion, FLD*) verwendet. Dabei wird ein funktionaler Zusammenhang zwischen Strahlungsenergie und Fluß angenommen. Das heißt, die zeitabhängigen Momentengleichungen für den Fluß brauchen nicht mehr gelöst zu werden, und die Gleichung für die Strahlungsenergie bleibt als einzige zusätzlich zu den hydrodynamischen bestehen. Im einfacheren eindimensionalen Fall wurden dagegen beide Möglichkeiten (FLD und die direkte Lösung der zeitabhängigen Gleichung für den Fluß) implementiert. In Testrechnungen wurden die Verfahren ausführlich mit einer 'exakten' Lösung der Transportgleichung verglichen und der Ansatz der FLD gerechtfertigt.

Im nächsten Abschnitt wird die Ableitung der *mixed-frame* Momentengleichungen des Strahlungstransports und die Anwendung der FLD gezeigt, wobei teilweise HS und MM gefolgt wird. Die Energiegleichung wird dann ins mitbewegte System transformiert, weil dort FLD am einfachsten angewendet werden kann. Im darauf folgenden Abschnitt werden kurz die hydrodynamischen Gleichungen einschließlich der Korrekturen durch Strahlung angegeben.

4.2 Die Momentengleichungen des Strahlungsfeldes

Die Transportgleichung für die Strahlungsintensität I bei einer Ausbreitung in die Richtung $\mathbf{n}$ mit der Frequenz ν lautet

$$\frac{\partial I(\mathbf{n}, \nu)}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{n}, \nu) = \eta(\mathbf{n}, \nu) - \rho \left[\chi(\mathbf{n}, \nu) + \sigma(\mathbf{n}, \nu) \right] I(\mathbf{n}, \nu) . \quad (4.1)$$

Dabei bezeichnet $\eta = \eta^t + \eta^s$ die totale Emissivität als Summe aus thermischem und Streuanteil. χ ist die wahre Absorption, σ der Streukoeffizient, und ρ bezeichnet die Gasdichte. Die Abhängigkeit aller Größen von der räumlichen Lage $\mathbf{r}$ ist impliziert. Zur Transformation der rechten Seite von (4.1) ins mitbewegte

System, um so die *mixed-frame* Transportgleichung zu erhalten, werden die Relationen

$$\chi(\mathbf{n}, \nu) = \frac{\nu_0}{\nu} \chi_0(\nu_0), \quad (4.2)$$

$$\eta(\mathbf{n}, \nu) = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 \eta_0(\nu_0) \quad (4.3)$$

verwendet, die von Thomas (1930) als Konsequenz der Lorentzinvarianz der Transportgleichung (4.1) abgeleitet wurden. Für die Intensität findet man

$$I(\mathbf{n}, \nu) = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^3 I_0(\mathbf{n}_0, \nu_0). \quad (4.4)$$

D.h., I/ν^3 ist eine Lorentzinvariante. Zur Notation ist zu bemerken, daß alle Größen mit dem Index "o" im mitbewegten System gemessen werden und die nicht-indizierten im Laborsystem. Der Zusammenhang zwischen ν und ν_0 ist bis zur Ordnung (u/c), wobei $u = |\mathbf{u}|$ der Betrag der Geschwindigkeit der Gasströmung ist, gegeben durch die übliche Dopplerbeziehung

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_0}{c}\right). \quad (4.5)$$

Wendet man eine Lorentztransformation auf $\mathbf{n}$ an, so findet man bis zur $O(u/c)$

$$\mathbf{n} = \frac{\nu}{\nu_0} \left(\mathbf{n}_0 + \frac{\mathbf{u}}{c} \right). \quad (4.6)$$

Einsetzen von (4.2-4.4) in (4.1) liefert die *mixed-frame* Transportgleichung für die spezifische Intensität

$$\frac{\partial I(\mathbf{n}, \nu)}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{n}, \nu) = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 \left[\eta_0 - \rho (\chi_0 + \sigma) I_0 \right], \quad (4.7)$$

Dabei bedeuten $I_0 = I(\mathbf{n}_0, \nu_0)$, $\eta_0 = \eta(\nu_0)$ usw. Weil alle atomaren Prozesse nun isotrop sind, ist die Richtungsabhängigkeit verschwunden, und σ bezeichnet den konstanten Thomson-Streuquerschnitt für Elektronenstreuung, der im mitbewegten System als isotrop angenommen wird. Geht man dagegen von der üblichen $\cos^2\theta$ Winkelabhängigkeit des quantenmechanischen Streuquerschnitts bei Thomson-Streuung aus, so folgt die gleiche Beziehung, wie in HS abgeleitet wird (siehe Gl. 2.16 dort).

Die Momente der spezifischen Intensität sind definiert als

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{r}) &= \int_0^\infty E(\mathbf{r}, \nu) d\nu = \frac{1}{c} \oint \int_0^\infty I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) d\nu d\Omega \\
\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \int_0^\infty \mathbf{F}(\mathbf{r}, \nu) d\nu = \oint \int_0^\infty I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} d\nu d\Omega \\
\mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \int_0^\infty \mathbf{P}(\mathbf{r}, \nu) d\nu = \frac{1}{c} \oint \int_0^\infty I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} d\nu d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.8a-c}$$

wobei E die *Energiedichte*, $\mathbf{F}$ den *Fluß* und $\mathbf{P}$ den *Spannungs- oder Drucktensor* des Strahlungsfeldes (im Laborsystem) bezeichnen. Die analogen Beziehungen (mit Index Null) gelten im mitbewegten System. Da $\mathbf{P}$ eine Tensorgröße ist, bezeichnet $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$ das dyadische Produkt. Aus den Gleichungen (4.8) folgt, daß für die Spur von $\mathbf{P}$ in **allen** Koordinatensystemen $\text{Tr}(\mathbf{P}) = E$ gilt. Diese Momente bilden den sog. *Energie-Spannungstensor* des Strahlungsfeldes⁵⁾

$$R^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} E & F^i \\ F^i & P^{ij} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Multipliziert man nun (4.7) mit $\mathbf{n}^0$ und $\mathbf{n}^1$ und integriert über die Frequenz und den vollen Raumwinkel 4π , so erhält man unter Benutzung der Relationen $\nu d\nu d\Omega = \nu_0 d\nu_0 d\Omega_0$, $d\nu/\nu = d\nu_0/\nu_0$ und den Gleichungen (4.5) und (4.6) die ersten zwei Momentengleichungen für die Energiedichte und den Fluß des Strahlungsfeldes

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \rho x_E c (S - E_0) - \frac{\rho (x_F + \sigma)}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_0 \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + c^2 \nabla \mathbf{P} = \rho x_E c (S - E_0) \mathbf{u} - \rho c (x_F + \sigma) \mathbf{F}_0, \tag{4.11}$$

bis zur $O(u/c)$. Die Divergenz eines Tensors $\mathbf{A}$ ist hierbei abgekürzt als $\nabla \mathbf{A}$, wobei $(\nabla \mathbf{A})^i = A^{ij}_{,j} \equiv \partial A^{ij} / \partial x^j$ bedeutet und Summation über doppelte Indizes impliziert ist. In (4.10) und (4.11) bezeichnet

$$x_E = \int_0^\infty x(\nu_0) E(\nu_0) d\nu_0 / \int_0^\infty E(\nu_0) d\nu_0 \tag{4.12}$$

den energiegewichteten mittleren Absorptionskoeffizienten. x_F ist definiert durch

$$x_F = \int_0^\infty F(\nu_0) d\nu_0 / \int_0^\infty x(\nu_0) F(\nu_0) d\nu_0, \tag{4.13}$$

5) In (4.9) laufen die griechischen Indizes von 0 bis 3, während die lateinischen von 1 bis 3 laufen und die gewöhnlichen Komponenten eines Vektors oder Tensors in drei Dimensionen bezeichnen.

und bezeichnet das analoge flußgewichtete Mittel. In den Gleichungen wurde auch die sog. *Quellfunktion*

$$S = \left(\int_0^\infty \eta(v) dv \right) / (\rho x_o) \quad (4.14)$$

eingeführt.

Die Gleichungen (4.10) und (4.11) sind die Momentengleichungen des Strahlungstransports in denen alle Größen auf der rechten Seite im mitbewegten System und auf der linken Seite im Laborsystem ausgedrückt sind. Die Quellfunktion unterscheidet sich in beiden Systemen nur durch Terme der $O(u^2/c^2)$ (vgl. HS).

Um zu den *mixed-frame* Momentengleichungen zu gelangen, müssen noch E_o und F_o auf der rechten Seite ins ruhende Inertialsystem transformiert werden. Dies wird durch eine Lorentztransformation von $R^{\mu\nu}$ nach $R_o^{\mu\nu}$ erreicht (Gl. (4.9), siehe auch MM, Kap. 4 und 6). Bis zur $O(u/c)$ findet man die folgenden Beziehungen (z.B. Simon, 1963)

$$P^{ij} = P_o^{ij} + \frac{1}{c^2} \left(F_o^i u^j + F_o^j u^i \right) \quad (4.15a)$$

$$F^i = F_o^i + P_o^{ij} u^j + E_o u^i \quad (4.16a)$$

$$E = E_o + \frac{2}{c^2} F_o^i u^i \quad (4.17a)$$

Die inversen Gleichungen

$$P_o^{ij} = P^{ij} - \frac{1}{c^2} \left(F^i u^j + F^j u^i \right) \quad (4.15b)$$

$$F_o^i = F^i - P^{ij} u^j - E u^i \quad (4.16b)$$

$$E_o = E - \frac{2}{c^2} F^i u^i \quad (4.17b)$$

erhält man einfach durch Vertauschen der mitbewegten und inertialen Variablen und Umkehr des Vorzeichens der Geschwindigkeit u . Einsetzen von (4.16b) und (4.17b) in (4.10) und (4.11) liefert bis zur $O(u/c)$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot F = \rho \left(x_E c (S - E) + \frac{(x_F - \sigma)}{c} u \cdot F \right) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + c^2 \nabla P = \rho \left(x_E c (S - E) u - c (x_F + \sigma) (F - Eu - uP) \right). \quad (4.19)$$

Dies sind die gesuchten (ersten zwei) *mixed-frame* Momentengleichungen des Strahlungstransports wobei *alle* Variablen des Strahlungsfeldes im Laborsystem gegeben sind (man vergleiche Gl. (4.18,4.19) mit (4.10,4.11)). In zweidimensionalen numerischen Problemen, in denen vor allem raumfeste Eulersche Gitter verwendet werden, ist diese Formulierung der mitbewegten (Lagrangeschen) Methode vorzuziehen.

Bemerkenswert in diesen Gleichungen ist das *unterschiedliche* Vorzeichen von κ_F und σ in der Energiegleichung. Dies ist eine Konsequenz der Lorentz-Transformation.

An den Gleichungen (4.18) und (4.19) erkennt man eine wesentliche Eigenschaft dieser Momentengleichungen, und zwar enthält die Gleichung für das n -te Moment (der Intensität) stets die Divergenz des $(n+1)$ -ten Moments. In diesem Fall beinhaltet das System nur vier Gleichungen aber die zehn Unbekannten E, F, P . Weil die simultane Lösung der winkelabhängigen Strahlungstransportgleichung (4.1) simultan mit der Hydrodynamik momentan nicht durchführbar ist (daraus könnten dann die Momente berechnet werden, zumindest iterativ), wird hier eine Näherungslösung des Strahlungstransports verwendet. Dazu werden im folgenden zwei verschiedene Wege einer approximativen numerischen Lösung entwickelt, wodurch sich die Möglichkeit des Vergleichs zweier unabhängiger Modelle ergibt. Zunächst wird eine verallgemeinerte Eddington-Näherung beschrieben, bei der die erste Momentengleichung (für den Fluß) erhalten bleibt und simultan mitgelöst werden muß. Anschließend wird die FLD-Theorie angewandt, durch die das Gleichungssystem nach der 0. Momentengleichung abgeschlossen wird. Diese zweite Methode wird dann in den zweidimensionalen Rechnungen Verwendung finden.

4.2.1 Die Eddington-Näherung

Um die unendliche Sequenz von Momentengleichungen zu lösen, wird üblicherweise das System an einem bestimmtem Level abgebrochen und ein funktionaler Zusammenhang zwischen einem gegebenen Moment und Momenten niedrigerer Ordnung angenommen. Diese sog. *Abschlußbedingung* sollte natürlich physikalisch konsistent sein. Bei Strahlungstransportproblemen geschieht dieser Abschluß durch Einführung des *Eddington-Tensors* T_{Edd} , der durch die Gleichung

$$P = E T_{\text{Edd}} \quad (4.20)$$

definiert ist, wobei T_{Edd} eine bekannte Funktion von E , F oder anderen physikalischen Variablen ist⁶⁾. Für den Fall isotroper Intensität gilt die klassische Eddington-Näherung

$$T_{\text{Edd}} = \frac{1}{3} I. \quad (4.21)$$

I ist der Einheitstensor mit $I^{ij} = \delta^{ij}$. Die Gültigkeit von (4.21) bei Isotropie folgt sofort aus den Definitionen der Momente (4.8). Für den Fall einer um eine bestimmte Richtung $\tilde{n}$ symmetrischen Intensität findet Levermore (1984) die folgende Form für den Eddington-Tensor

$$T_{\text{Edd}} = \frac{1}{2} \left[(1 - f_{\text{Edd}}) I + (3 f_{\text{Edd}} - 1) \tilde{n} \cdot \tilde{n} \right]. \quad (4.22)$$

Die Größe f_{Edd} wird als Eddington-Faktor bezeichnet und ist durch die Gleichung

$$f_{\text{Edd}}(r, n, t) = \oint (n \cdot \tilde{n})^2 \psi(r, n, t) d\Omega \quad (4.23)$$

gegeben, wobei ψ die normierte Intensität bedeutet, die durch $\psi = I/(cE)$ definiert ist. Der in den Rechnungen benutzte analytische Ausdruck für f_{Edd} wird weiter unten im Absatz über die Diffusionsnäherung angegeben⁷⁾. Wird die Abschlußbedingung (4.20) ins Laborsystem transformiert, erhält man

$$P^{ij} = (E - 2 \frac{u^j F^j}{c^2}) T_{\text{Edd}}^{ij} + \frac{1}{c^2} (u^i F^j + u^j F^i). \quad (4.24)$$

Einsetzen in (4.19) liefert bis zur $O(u/c)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^j}{\partial t} + c^2 \frac{\partial (E T_{\text{Edd}}^{ij})}{\partial x^j} &= \rho x_E c (S - E) u^j - \\ &- \rho c (x_F + \sigma) [F^j - E u^j (I^{ij} + f_{\text{Edd}} T_{\text{Edd}}^{ij})] + \\ &+ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x_j} (2 (u \cdot F) T_{\text{Edd}}^{ij} - u^i F^j - u^j F^i). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Die drei Gleichungen (4.25) zusammen mit der Energiegleichung (4.18) und einer Relation $T_{\text{Edd}} = T_{\text{Edd}}(E, F, \rho, \dots)$ (vgl. Gl. 4.22, 4.23) bilden also ein geschlossenes Gleichungssystem für E , F (bei bekannten Opazitäten, Dichten etc.).

6) Aus den Definitionsgleichungen der Momente der Intensität lassen sich bestimmte Beschränkungen für T_{Edd} ableiten, Levermore (1984).

7) Im isotropen Fall gilt $f_{\text{Edd}} = \frac{1}{3}$.

Zu bemerken ist hier, daß selbst im achsialsymmetrischen Fall alle drei Komponenten von $\mathbf{F}$ (auch F_φ) ungleich Null sind und mitberücksichtigt werden müssen. Wegen der zu erwartenden numerischen Probleme speziell mit (4.25) werden in den Testrechnungen alle geschwindigkeitsabhängigen Terme, die höchstens von der $O(u/c)$ bezüglich der führenden Terme sind, in (4.18, 4.25) vernachlässigt. Die Tests führen ohnehin immer zu stationären Zuständen mit verschwindenden Geschwindigkeiten.

Die Gleichungen werden durch diese Annahme eines **statischen** Mediums deutlich vereinfacht und lauten

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \rho c \kappa_E (S - E) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + c^2 \nabla (E \mathbf{T}_{\text{Edd}}) = \rho c (\bar{\kappa}_F + \sigma) \mathbf{F}. \quad (4.27)$$

Sie sind identisch im bewegten und Labor-System und hätten auch direkt aus der Transportgleichung im statischen Fall durch Momentenbildung abgeleitet werden können. Im achsialsymmetrischen Fall sind in der Eddington Näherung also vier partielle Differentialgleichungen zusätzlich zu den hydrodynamischen zu lösen.

4.2.2 Flux-Limited Diffusion

Die übliche Diffusionsnäherung erhält man aus der Momentengleichung für den Fluß in einem statischen Medium bei Vernachlässigung der geschwindigkeitsabhängigen Terme. Zunächst wird die klassische Eddington-Näherung für den isotropen Fall (4.20) angewandt, und zusätzlich die Zeitableitung in (4.19) vernachlässigt, weil diese im optisch dicken Fall bei mittleren freien Weglängen der Photonen, die klein sind gegenüber den typischen Längenskalen, nur von der $O(u^2/c^2)$ ist. Die Gl. (4.19) vereinfacht sich unter diesen Annahmen zu

$$\mathbf{F}_0 = - \frac{c \lambda}{\rho (\kappa_F + \sigma)} \nabla E_0, \quad (4.28)$$

wobei $\lambda = \frac{1}{3}$ ist, und der Index verdeutlicht, daß diese Relation nur im *comoving-frame* gilt. Gl. (4.28) ist recht genau im optisch dicken Fall und wird erfolgreich in Sternaufbaurechnungen verwendet.

In transparenten Medien (auch **optisch dünn** genannt, weil die Photonen diese fast ungehindert durchströmen) ist jedoch der durch (4.28) (mit $\lambda = \frac{1}{3}$) gegebene Fluß im allgemeinen zu groß, und die effektive Signalgeschwindigkeit kann sogar größer werden als die Lichtgeschwindigkeit. Dies ist eine Folge der unendlichen Signalgeschwindigkeit bei linearer Diffusion (siehe MM, Kap.7). Zur Beseitigung dieses

Problems wird (meistens *ad hoc*) ein Faktor eingeführt, der den Fluß auf physikalische Werte im optisch dünnen Fall begrenzt. Allgemein schreibt man $\lambda = \lambda(R)$, wobei der dimensionslose Parameter R eine Funktion der lokalen physikalischen Bedingungen ist. Da die Funktion $\lambda(R)$ generell nur bei einer vollständigen Lösung der Strahlungstransportgleichung bekannt ist, werden analytische Ausdrücke verwendet, die in den beiden Grenzfällen optisch dick (isotrop) und optisch dünn (freies Strömen der Photonen) die richtigen Werte für F ergeben und den Zwischenbereich möglichst glatt überbrücken. In der Literatur sind die verschiedensten Beziehungen für $\lambda(R)$ verwendet worden (s. z.B. Levermore, 1984, und Referenzen). Im Rahmen dieser Arbeit ist durch Vergleich mit detaillierten Sternatmosphärenmodellen die folgende Form entwickelt worden:

$$\lambda = 2 / \left(3 + \sqrt{9 + 10 \cdot R^2} \right) \quad \text{für } 0 \leq R \leq 2$$

$$\lambda = 10 / \left(10 \cdot R + 9 + \sqrt{180 \cdot R + 81} \right) \quad \text{für } 2 < R < \infty.$$
(4.29)

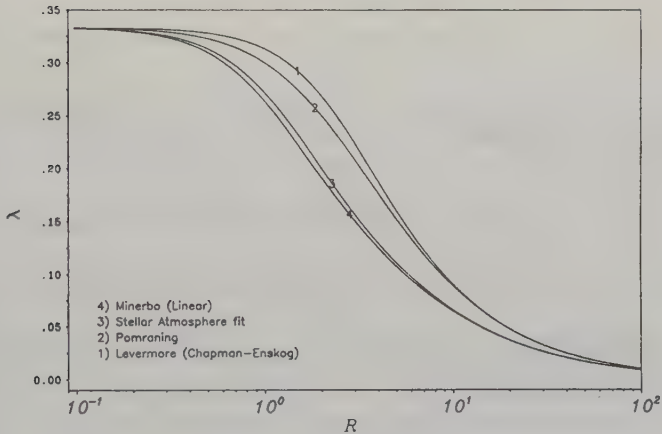


Abb. 4.1 Die Abhängigkeit des Flux-Limiters λ von dem dimensionslosen Gradienten R (Gl. 4.29) in verschiedenen Arbeiten (siehe auch Levermore, 1984).

Die Gleichung (4.29) begrenzt den Fluß betragsmäßig ($|F| < cE$). Der Parameter R , auch dimensionsloser Gradient (der Strahlungsenergie) genannt, ist gegeben durch

$$R = \frac{1}{\rho (x_F^+ \sigma)} \frac{|\nabla E|}{E}, \quad (4.30)$$

und ist sowohl zu $|\nabla E|$ als auch zur mittleren freien Weglänge der Photonen

$$I_P = \frac{1}{\rho (\kappa_F + \sigma)} \quad (4.31)$$

proportional.

In Abb. (4.1) sind verschiedene Flux-Limiter λ über R aufgetragen (die Kurve 2 gehört z.B. zur Gl. 4.29). Einige Kurven aus Levermore (1984, und dort angegebene Referenzen) sind ebenfalls eingezeichnet. Alle Kurven gehen vernünftigerweise in den Grenzfällen ineinander über und zeigen nur im mittleren Bereich größere Abweichungen.

Es stellt sich nun die Frage, inwieweit diese Modifikation der Diffusionsnäherung den Ausgangspunkt der klassischen Eddington-Näherung beeinflusst. Weil f_{Edd} den Grad der Anisotropie des Strahlungsfeldes, d.h. wie stark die Strahlung gerichtet ist, und λ die Abweichungen von der Gleichgewichtsdiffusionsnäherung angibt, besteht zwischen diesen beiden Parametern ein Zusammenhang. Levermore (1984) findet, in der Notation von (4.23), für den Eddington-Faktor

$$f_{\text{Edd}} = \lambda (1 + \lambda R). \quad (4.32)$$

Flux-Limiter λ und Eddington-Faktor f_{Edd} erfüllen (wie bereits erwähnt) die korrekten Grenzfälle

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{3}, f_{\text{Edd}} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ für } R \rightarrow 0 \text{ im optisch dicken Diffusions-Limit, und} \quad (4.33)$$

$$|\mathbf{F}| \rightarrow cE, f_{\text{Edd}} \rightarrow 1 \text{ für } R \rightarrow \infty \text{ im optisch dünnen Strömungs-Limit.}$$

Sei nun der Strömungsfaktor f_s durch $|\mathbf{F}| = f_s c E$ definiert, so findet man mit (4.28) und (4.31) die Beziehung

$$f_s = \lambda(R) R. \quad (4.34)$$

Gleichung (4.34) impliziert nun einen Zusammenhang zwischen f_{Edd} und f_s , welcher mit Gl. (4.29) die Form

$$\begin{aligned} f_{\text{Edd}} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} f_s & \text{für } 0 \leq f_s \leq 0.4 \\ f_{\text{Edd}} &= \frac{5}{9} (1 - f_s)^2 + f_s^2 & \text{für } 0.4 < f_s \leq 1.0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

besitzt⁸⁾.

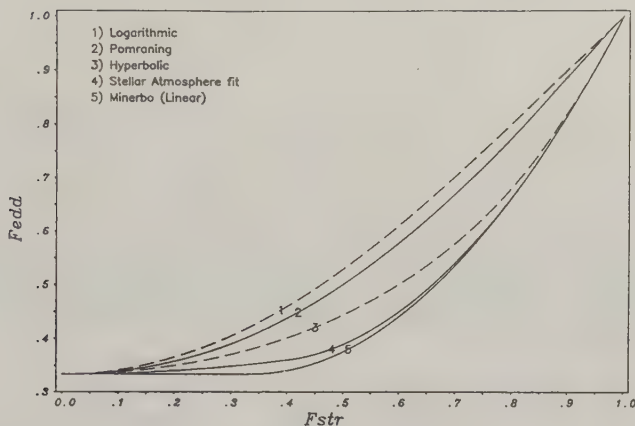


Abb. 4.2 Eddington-Trajektorien (s. Text) für verschiedene Formen des Flux-Limiters (vgl. Fu, 1987).

In Abb.(4.2) sind die 'Eddington Trajektorien' (f_{Edd} über f_s) für verschiedene Flux-Limiter aufgetragen. Die zwei Kurven, die mit 'hyperbolic' und 'logarithmic' bezeichnet sind, stammen aus einer neueren Arbeit von Fu (1987) und geben die Grenzen des erlaubten Bereichs für die Eddington-Trajektorien an, den Fu aus einem statistischen Modell für die spezifische Intensität abgeleitet hat. Der hier benutzte Flux-Limiter (4.29) liegt offensichtlich außerhalb des von Fu angegebenen Bereichs. Da aber Gl. (4.29) einer sphärisch ausgedehnten Modell-Sternatmosphäre (die eine 'exakte' Lösung der Transfergleichung darstellt) angepaßt wurde (s. Abschnitt. 6.1.3), stellt sich hier die Frage nach der Gültigkeit des statistischen Ansatzes von Fu. Außerdem soll hier nochmals betont werden, daß im Bereich zwischen den Grenzfällen die Form des Flux-Limiters immer eine Art *ad hoc*-Beschreibung ist, die nur durch Vergleiche mit exakten Lösungen gerechtfertigt werden kann.

Um die Näherungen der flußbegrenzten Diffusion in die Momentengleichungen einzubauen, muß die linke Seite der Gl. (4.10) mittels (4.8) in das mitbewegte System transformiert werden. Man erhält

8) Man beachte, daß Gl. (4.29) von dieser Gleichung mittels (4.32) und (4.34) abgeleitet wurde, wohingegen (4.35) direkt aus den Testrechnungen stammt. Die Details sind weiter unten im Kap.6 bei der Beschreibung der Tests genauer erläutert.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_o}{c^2} \right) + \nabla \cdot \mathbf{F}_o + \nabla \cdot (\mathbf{u} E_o + \mathbf{u} \mathbf{P}_o) = \\ = \rho \left[c \chi_E (S - E_o) - \frac{\chi_F + \sigma}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_o \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Dies ist bis zur $O(u/c)$ identisch mit der von Buchler (1979) angegebenen *comoving-frame* Energiegleichung des Strahlungsfeldes. Die Gl. (4.11) für den zeitabhängigen Fluß kann nun gemäß (4.28) vernachlässigt werden, d.h. das System wird bei der 0. Ordnung abgeschlossen. Weil auf dynamischen Zeitskalen $u \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}$ gilt, wobei Δx und Δt die räumlichen und zeitlichen Gitterabstände sind, ist $\frac{\partial}{\partial t} (2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_o / c^2)$ von der $O(u^2/c^2)$ im Vergleich zu $\nabla \cdot \mathbf{F}_o$ und kann deswegen vernachlässigt werden. Werden nun die Gleichungen für $\mathbf{F}_o$ und $\mathbf{P}_o$ (4.20 und 4.28) in (4.36) eingesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_o}{\partial t} + \nabla \cdot [E_o \mathbf{u} (\mathbf{I} + \tau_{\text{Edd}})] = \nabla \cdot \left(\frac{c \lambda}{\rho (\chi_F + \sigma)} \nabla E_o \right) + \\ + \rho c \chi_E (S - E_o) + \lambda \mathbf{u} \cdot \nabla E_o. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dies ist die **eine** zusätzliche (parabolische) partielle Differentialgleichung, die zu den hydrodynamischen Gleichungen im Fall der Flux-Limited Diffusion gelöst werden muß.

4.3 Hydrodynamische Gleichungen

Die hydrodynamischen Gleichungen seien hier nur kurz angegeben ohne ausführliche Kommentare, weil detaillierte Ableitungen in den Standardlehrbüchern (z.B. Landau & Lifshitz, 1987) beschrieben sind. Die Berücksichtigung der Korrekturen durch die radiativen Terme geschieht am besten (und vor allem korrekt) in der relativistischen kovarianten Formulierung von Hydrodynamik und Strahlungstransport, weil das Photonengas offensichtlich eine hochgradig relativistische 'Flüssigkeit' ist. Eine vollständige und sehr ausführliche Ableitung der Gleichungen der Strahlungshydrodynamik ist in MM, oder auch etwas älter in Pomraning (1973), dargelegt, während z.B. Simon (1963) oder Buchler (1979, 1983) kürzere Darstellungen geben. Die mixed-frame Methode ist in HS oder Mihalas & Klein (1982) entwickelt. Meistens wird in der Literatur mit den Gleichungen für die totale (Gas- und Strahlungs-) Energie oder dem totalen Impuls gearbeitet, weil dies zu kompakteren Gleichungen führt. Bei expliziten Rechnungen ist es günstiger, mit der Energie und dem Impuls des Gases als Variable zu arbeiten, und die radiativen Terme als Korrekturen in die normalen hydrodynamischen Gleichungen einzufügen.

Weil das zu lösende Problem, wie bereits erwähnt, die Akkretion von Materie aus einer achsialsymmetrischen Scheibe auf ein sphärisches Objekt (hier einem Weißen Zwerg) beinhaltet, sind Kugelkoordinaten am vorteilhaftesten. Diese ermöglichen auch eine einfache Behandlung der inneren Randbedingung. Es wird hier allerdings ein leicht modifiziertes Koordinatensystem verwendet (Kley & Hensler, 1987a, kurz KH). Und zwar sei der Winkel α durch

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \vartheta \quad (4.38)$$

definiert. D.h., α bezeichnet den Winkelabstand von der Äquatorebene. Die im Koordinatensystem (r, α, φ) geschriebenen Gleichungen haben eine sehr ähnliche Struktur wie die in üblichen Kugelkoordinaten und werden aus diesen einfach durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} \sin \vartheta &\rightarrow \cos \alpha & \frac{\partial}{\partial \vartheta} &\rightarrow - \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \cos \vartheta &\rightarrow \sin \alpha & u_{\vartheta} &\rightarrow - u_{\alpha} \end{aligned}$$

erhalten. In der Auflistung der Gleichungen ist die φ -Abhängigkeit schon eliminiert, weil bei rein achsialsymmetrischen Strömungen $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ gilt. Als Geschwindigkeitsvariable werden hier (v, g, h) verwendet, wobei $v = u_r$ die radiale Geschwindigkeitskomponente und g und h (oder auch ω_{α} und ω_{φ}) die meridionale und azimuthale Winkelgeschwindigkeit bezeichnen, die durch

$$\begin{aligned} u_{\alpha} &= r g \\ u_{\varphi} &= r \cos \alpha h \end{aligned} \quad (4.39)$$

definiert sind.

Die Erhaltungseigenschaften eines Gases oder einer Flüssigkeit in Bewegung führen nun zu den folgenden Gleichungen, die hier in der sog. Eulerschen und Erhaltungsform angegeben seien.

Kontinuitätsgleichung⁹⁾ (Massenerhaltung)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial}{\partial \sin \alpha} (\cos \alpha \rho g) = 0 \quad (4.40)$$

9) An dieser Gleichung wird auch gleich die Form der Divergenz, hier $\nabla \cdot (\rho u)$, im Koordinatensystem (r, α, φ) demonstriert.

Bewegungsgleichungen (Impulserhaltung)

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v u) = r \rho (g^2 + \cos^2 \alpha h^2) - \frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \nabla \cdot T_r + \frac{1}{r} T_{rr}$$

$$\frac{\partial(\rho g r^2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho g r^2 u) = -r^2 \rho \cos \alpha \sin \alpha h^2 - \frac{\partial p}{\partial \alpha} + r f_\alpha + \nabla \cdot (r T_\alpha) + \tan \alpha T_{\varphi\varphi}$$

$$\frac{\partial(\rho \cos \alpha r^2 h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \cos \alpha r^2 u) = \nabla \cdot (r \cos \alpha T_{r\varphi}) \quad (4.41a-c)$$

Dabei bezeichnen p den Gasdruck, f die Kraftdichte und $T = (T_r, T_\alpha, T_\varphi)$ (mit den Vektoren $T_i = (T_{ir}, T_{i\alpha}, T_{i\varphi})$, $i = r, \alpha, \varphi$) den Viskositätstensor. Die Kraftdichte ist gegeben durch $f = -\rho \nabla \Psi + f_R$, wobei Ψ das feste Gravitationspotential des akkretierenden Objekts ist¹⁰⁾, und

$$f_R = \rho \frac{x_F + \sigma}{c} F_\odot \quad (4.42)$$

die durch das Strahlungsfeld auf die Gasströmung ausgeübte Kraft bezeichnet. Mit anderen Worten, dies ist der Impulstransfer zwischen Strahlungsfeld und Gas. Die Komponenten des Viskositätstensors sind weiter unten angegeben.

Energiegleichung (Energieerhaltung)

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon u) = -p \nabla \cdot u + \Phi - \Lambda \quad (4.43)$$

In (4.43) bezeichnet ε die spezifische thermische Energie des Gases. Die Form der Dissipationsfunktion $\Phi = (T \nabla) u$ in Kugelkoordinaten ist im Anhang (A1) angegeben. Die Größe

$$\Lambda = \rho c x_E (S - E) \quad (4.44)$$

beschreibt die Kühlung *und* Heizung des Gases durch Absorptions- und Emissionsprozesse¹¹⁾, d.h. den Energieaustausch zwischen Strahlungsfeld und Gas. Wegen der Energieerhaltung hat der entsprechende Term in der Strahlungsenergiegleichung (4.10 oder 4.37) das umgekehrte Vorzeichen. Wärmeleitung ist nicht in diesem Modell mitberücksichtigt.

10) Die Akkretionsscheibe in Kataklysmischen Systemen ist generell nicht selbstgravitierend.

11) In der Literatur wird mit Λ häufig *nur* die Kühlung bezeichnet, während Γ die Heizung symbolisiert.

Zur späteren Benutzung seien noch die Komponenten des viskosen Spannungstensors im Koordinatensystem (r, α, φ) angegeben

$$\begin{aligned}
 T_{rr} &= 2 \eta \left(-\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) = \frac{4}{3} \eta \left(2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) - \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \tan \alpha g \right) \\
 T_{r\alpha} &= \eta \left(r \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \\
 T_{r\varphi} &= \eta \left(r \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial r} \right) \\
 T_{\alpha\alpha} &= 2 \eta \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} + \frac{v}{r} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) = \frac{4}{3} \eta \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + 2 \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \tan \alpha g \right) \\
 T_{\alpha\varphi} &= \eta \left(\cos \alpha \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) \\
 T_{\varphi\varphi} &= 2 \eta \left(\frac{v}{r} - \tan \alpha g - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) = \frac{4}{3} \eta \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) - \frac{\partial g}{\partial \alpha} - 2 \tan \alpha g \right)
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Hier ist η der Koeffizient der Scherviskosität, die eine bekannte Funktion der anderen physikalischen Variablen (z.B. Dichte, Geschwindigkeit, etc.) sein soll.

4.4 Hilfsgleichungen

Um den Satz der Gleichungen zu vervollständigen, müssen noch einige Aufbaugleichungen hinzugefügt werden. Als Zustandsgleichung wird hier das *ideale Gas*-Gesetz

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon \tag{4.46}$$

angesetzt, wobei γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist. Die Temperatur kann dann aus $p = (k \rho T) / (\mu m_p)$ (k = Boltzmann Konstante, m_p = Protonenmasse, μ = mittleres Molekulargewicht) berechnet werden, d.h. T ist direkt proportional zu ε . Das Gas besteht zur Vereinfachung aus reinem Wasserstoff, der wegen der hohen Temperaturen im Grenzschicht-Bereich als vollständig ionisiert betrachtet werden kann. Also gilt $\mu=0.5$ und $\gamma=5/3$.

Die genaue Ursache der hohen Viskosität in Akkretionsscheiben ist immer noch unklar (siehe die Diskussion in Kap. 2, oder in Pringle, 1981), so daß hier zur Vereinfachung wie schon in Kley (1985) und KH die kinematische Viskosität $\nu = \eta / \rho$ als konstant angenommen wird. Im Prinzip ist aber auch jede andere Form einfach zu implementieren. Für hochturbulente Strömungen, wie hier der Fall, ist bekannt, daß $\nu = \text{const.}$ eine gute Approximation ist. Irgendein turbulenter Druck (ähnlich der α -Scheibe) zusätzlich zum Gasdruck wird nicht berücksichtigt.

In der Kühlungs- und Heizungsrate Λ ist momentan nur Bremsstrahlung eingeschlossen, d.h. frei-frei Übergänge. Λ hat dann die Form (z.B. Burger & Katz, 1980, oder Chevalier & Klein, 1979)

$$\Lambda = -4\pi n\rho \left(\frac{3.77}{4\pi} c \frac{E}{T^{3.5}} - 6.80 \cdot 10^{-5} T^{0.5} \right) \quad (4.47)$$

mit der Einheit $[\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1}]$, wobei n hier die Anzahldichte des Gases, implizit durch $\rho = \mu n m_p$ definiert, bezeichnet.

In den Rechnungen zu dieser Arbeit wird nur mit den frequenzintegrierten Größen des Strahlungsfeldes gearbeitet und **graue** Opazitäten verwendet, so daß die zwei Mittel χ_F und χ_E identisch sind, und der Index weggelassen werden kann. Weil die Temperaturen des Wasserstoffgases deutlich über $10^4 K$ sind, ist die Kramersapproximation ausreichend genau für dieses Problem

$$\kappa = c_K \rho T^{-3.5} \quad [\text{cm}^2 \text{g}^{-1}]. \quad (4.48)$$

Um mit (4.44) und (4.47) konsistent zu sein, wird $c_K = 2.26 \cdot 10^{24}$ angenommen. Im Fall eines vollständig ionisierten Wasserstoffgases dominiert Thomson-Streuung, und σ hat den konstanten Wert $\sigma = 0.4 [\text{cm}^2 \text{g}^{-1}]$.

Nun ist der Satz der physikalischen Gleichungen komplett, und es ist möglich die 6 partiellen Differentialgleichungen über Raum und Zeit zu integrieren, um eine Entwicklung für die 6 Variablen ($\rho, v, g, h, \varepsilon, E$) zu erhalten. Von diesen können dann alle anderen relevanten Größen berechnet werden.

Zum Schluß dieses Kapitels soll noch hervorgehoben werden, daß man für die totale Energiedichte

$$e^{\text{tot}} = E_0 + \rho(\varepsilon + \frac{1}{2}u^2 + \psi) \quad (4.49)$$

durch einfaches Addieren der entsprechenden Gleichungen die folgende erhält

$$\frac{\partial e^{\text{tot}}}{\partial t} + \nabla \cdot (u e^{\text{tot}}) = \nabla \cdot [u(T - pI - P_0)] - \nabla \cdot F_0. \quad (4.50)$$

Dies ist das Erhaltungsgesetz für die Gesamtenergie. Numerische Methoden sollten mit (4.50) so gut wie möglich übereinstimmen.

5 Numerische Methode

5.1 Allgemeines zum Verfahren

Die wesentlichen Grundlagen der Methode sind schon in Kley (1985) und KH erläutert, weswegen hier nur die Erweiterungen (Strahlungstransport) und andere wichtige Verbesserungen detaillierter erklärt seien. Das System der partiellen Differentialgleichungen (PDG) wird auf einem raumfesten Eulerschen Gitter diskretisiert und so in ein System von *finiten Differenzengleichungen* (FDG) umgeformt. In dem kombinierten *explizit-impliziten* Verfahren werden die Kraft- und Advektionsterme explizit, Viskositäts- und radiative Terme dagegen implizit behandelt. Die resultierenden FDG sind formal (*i.e.* bei äquidistanten Gitterabständen) von der Ordnung $(\Delta x)^2$ und erster Ordnung in Δt . Eine Eigenschaft, die 'forward time and centered space' (FTCS) genannt wird (Roache, 1982). Es sei aber bemerkt, daß die Anwendung des sog. 'Operator-splittings' zu einer teilweisen Zentrierung des Zeitschritts und somit zu einer Erhöhung der Genauigkeit (in Δt) führt (*semi-second order*). Dabei werden die Gleichungen in vier Teile separiert: Advektion, Kraft (und Druck), Viskosität und Strahlung. Zur Vereinfachung und Erhöhung der numerischen Genauigkeit (Tscharnuter & Winkler, 1979) werden im allgemeinen die folgenden kompakten Ausdrücke für die Divergenzterme verwendet

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} = 3 \frac{\partial}{\partial r^3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \sin \alpha} .$$

5.1.1 Rechenbereich und Gitter

Wegen der Annahme von Achsialsymmetrie und Spiegelsymmetrie bzgl. des Äquators kann der Rechenbereich auf einen Quadranten einer beliebigen meridionalen Ebene beschränkt werden. Die Rechnungen umfassen also eine sphärische Schale mit $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ und $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$. Dieses Gebiet ist in $N_r \times N_\alpha$ Gitterzellen unterteilt, die in beiden Koordinatenrichtungen (r, α) einstellbar linear bis logarithmisch skaliert sind, so daß gilt

$$\frac{\Delta \alpha_j}{\Delta \alpha_{j+1}} := \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{\alpha_{j+1} - \alpha_j} = \text{const.} = C^\alpha, \quad (5.1a)$$

$$\frac{\Delta r_i}{\Delta r_{i+1}} := \frac{r_i - r_{i-1}}{r_{i+1} - r_i} = \text{const.} = C^r, \quad (5.1b)$$

d.h. die Gitterabstände vergrößern sich gleichmäßig. Für die Ränder gilt

$$r_1 = r_{\min}, \quad r_{N_r+1} = r_{\max} \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \alpha_{\min}, \quad \alpha_{N_\alpha+1} = \alpha_{\max}. \quad (5.1c)$$

Es sei hier gleich betont, daß durch "i" radiale Gitterzellen indiziert sind und durch "j" meridionale. Die Konstante(n) $C^\alpha(C^r)$ werden nach Vorgabe der jeweiligen (kleinsten) Gittergrößen $D^\alpha := \alpha_2 - \alpha_1$ (für r analog) aus der algebraischen Gleichung (Ableitung in Anh. A2, vgl. Gl. A2.3)

$$(C^\alpha)^{N_\alpha-1} - f C^\alpha + f - 1 = 0 \quad (5.2)$$

($f = (\alpha_{\max} - \alpha_{\min})/D^\alpha$) berechnet (für r wiederum analog). Durch $C^\alpha(C^r)$ ist also der Konzentrierungsgrad des Gitters bestimmt. Speziell bedeutet $C^\alpha = 1$ ein lineares α -Gitter und z.B. $C^\alpha = 0.1$ ein stark zum Äquator hin verfeinertes Gitter.

Alle bisherigen Angaben bezogen sich auf die Ränder der Gitterzellen. Dieses Gitternetz wird im folgenden als **a-Gitter** bezeichnet, wohingegen die Zellmitten das **b-Gitter** bilden. Also gilt z.B. $r_1^a = r_{\min}$, und $r_i^b = \frac{1}{2}(r_i^a + r_{i+1}^a)$ für alle i , und Analoges für α . Ein Ausschnitt dieses Gittersystems zusammen mit den Positionen einiger Variablen ist in Abb. 5.1 dargestellt und wird als sog. *staggered grid* bezeichnet.

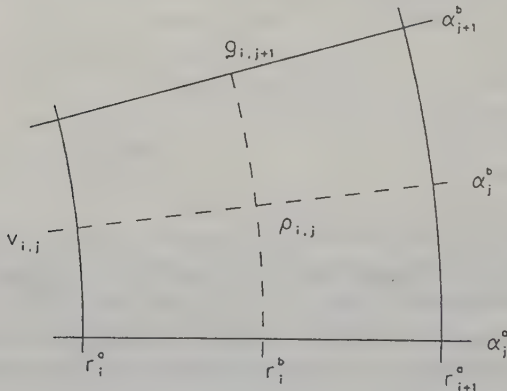


Abb. 5.1

Die Gitterdefinitionen und Positionen einiger Variablen.

Zu erwähnen ist, daß die zusätzlichen Variablen $F_r, F_\alpha (= -F_\theta)$ an den Zellgrenzen, dem a-Gitter, definiert sind (wie u_r, u_α) und E in den Mittelpunkten der Zellen. Die Differenzengleichungen können mit dieser Aufteilung besonders günstig formuliert werden. Die absolute Größe des Gitters, also die Werte von $r_{\min}, r_{\max}$, etc. werden in Kap. (6.3) angegeben.

5.1.2 Dimensionslose Variable

Um Vorfaktoren zu beseitigen und eventuelle Rundungsfehler zu minimieren, ist es in numerischen Rechnungen günstig, mit dimensionslosen Größen zu arbeiten. Als Längeneinheit wird hier der Sternradius (in Abschn. 6.3 genauer definiert) gewählt, $r_0 = R_*$. Die natürliche Zeiteinheit ist $t_0 = (GM_*/R_*^3)^{-1/2}$; das ist das $1/2\pi$ -fache der Kepler-Periode an der Sternoberfläche. Die Dichte wird auf die Zentraldichte des Materiestroms in der Scheibe normiert $\rho_0 = \rho_{\text{Disk}}(r_{\text{max}}, \alpha = 0) \approx 10^{-6} - 10^{-7} \text{ g/cm}^3$. Aus diesen Grundeinheiten folgen die Einheiten der Geschwindigkeit zu $u_0 = r_0/t_0$, der spezifischen inneren Energie zu $\varepsilon_0 = u_0^2$ und des Drucks und der Strahlungsenergie (beide haben die Dimension einer Energiedichte) zu $\rho_0 u_0^2$. Die Anwendung des idealen Gasgesetzes liefert dann $T_0 = (\mu \rho_0 m_p) / (\rho_0 k)$. In diesen dimensionslosen Variablen vereinfachen sich z.B. ideales Gasgesetz und Gravitationspotential zu $p = \rho T$ und $\Psi = -\frac{1}{r}$.

5.2 Zeitschritt

Explizite FDG haben den bedauerlichen Nachteil, einer Beschränkung des Zeitschritts zu unterliegen. Mit Hilfe einer Von Neumannschen Stabilitätsanalyse findet man zum Beispiel für den viskosen Teil der Gleichungen den maximalen Zeitschritt

$$\Delta t_{\text{visc}} = \frac{1}{8\nu} \min_{i,j} \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(r \Delta \alpha)^2} \right), \quad (5.3)$$

wie Kley (1985) für den Fall konstanten η 's (oder äquivalent konstanter Dichte) gezeigt hat. Nun haben die bisherigen Rechnungen (KH) erwiesen, daß bei steilen Dichtegradierten (5.3) nicht länger Gültigkeit besitzt und Instabilitäten auftreten. Weiterhin geht die Gittergröße quadratisch in (5.3) ein, was bei größerer räumlicher Auflösung zu einem sehr kleinen Zeitschritt führt. Da nun die Entwicklung der Strömung am besten auf dynamischen Zeitskalen geschieht, wird die Beschränkung durch Δt_{visc} vermieden, indem der viskose Teil implizit behandelt wird. Die analogen Überlegungen gelten für den Strahlungstransport, da z.B. die Kühl- und die Diffusionszeiten sehr viel kürzer als die dynamischen Zeitskalen sein können. Als einzige wirksame Limitierung des Zeitschritts bleibt die Courant-Friedrich-Levy (CFL) Bedingung

$$\Delta t_{\text{CFL}} = \min_{i,j} \left(\frac{\Delta r_i}{c_s + u_r}, \frac{r_i \Delta \alpha_i}{c_s + u_\alpha} \right), \quad (5.4)$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit bedeutet. Physikalisch beinhaltet Gl. (5.4), daß

sich die Information in einem Zeitschritt Δt nicht weiter als eine Gitterzelle ausbreiten kann. In den Rechnungen wird üblicherweise das (.5 - .8) fache dieses Wertes verwendet.

In den folgenden Absätzen werden einige Besonderheiten der Methode diskutiert, wobei mehr Gewicht auf die impliziten Teile, vor allem auf den radiativen Teil gelegt wird.

5.3 Advektionsterme

Der entsprechende Gleichungsteil lautet hier

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{\text{adv}} = - \nabla \cdot (y \mathbf{u}) \quad (5.5)$$

mit $y \in (\rho, \rho v, \rho g r^2, \rho h \cos^2 \alpha r^2, \rho \varepsilon, E)$. In der Eulerschen Formulierung verursachen die nichtlinearen Advektionsterme normalerweise am meisten Probleme, ein genaues und stabiles numerisches Verfahren zu entwickeln. In dieser Arbeit wird der *mono-tone Transport Algorithmus* verwendet (*mono-scheme*), der von zweiter Ordnung in Δx ist, und eine Erweiterung der einfacheren Upwind-Methode darstellt. Die Details sind in KH beschrieben. Die hohe Genauigkeit des Mono-Verfahrens wurde deutlich durch ausführliche Vergleiche mit anderen Methoden von Hawley *et al.* (1984) demonstriert. Ein neueres Verfahren ist die *Piecewise parabolic Method* (PPM) von Colella & Woodward (1984). Es ist dem hier verwendeten in der Behandlung steiler Gradienten und Schockfronten überlegen, wurde allerdings bisher nur für reibungsfreie Strömungen entwickelt. Im Rahmen dieser Arbeit müssen allerdings starke Viskositätseffekte berücksichtigt werden, so daß das Mono-Verfahren ausreichend genaue Resultate liefert. Eine andere neue Methode mit vergleichbarer Auflösung wie diese, ist die von Osher entwickelte (Osher & Chakravarthy, 1983; Sawada *et al.*, 1986) (*'Osher-scheme'*). In den Testrechnungen werden beide Algorithmen miteinander verglichen (Kap. 6.1.1).

In der hier verwendeten Version der Mono-Methode werden immer die Dichten der entsprechenden Größen, z.B. Drehimpulsdichte $H = \rho r^2 \cos^2 \alpha h$, oder Energiedichte $e = \rho \varepsilon$ ganz analog zur Massendichte advektiert. Bei den poloidalen Impulsen müssen geeignete Mittelwerte berücksichtigt werden (s. Abb. 5.1). Im Gegensatz hierzu advektieren z.B. die Verfahren von Rozyczka (1985) und von KH, nur die spezifischen Größen, die dann mit der transportierten Masse multipliziert werden. Extensive Testrechnungen haben allerdings herausgestellt, daß zwar die Advektion der Dichten eine leicht geringere Genauigkeit hat, aber zu stabileren Algorithmen führt, was an der höheren Diffusivität liegt. Generell sind Verfahren mit größerer Selbst-

diffusion stabiler (z.B. Smarr, 1978), weswegen auch oft ein künstlicher Viskositätsterm hinzugefügt wird. Im Vergleich zu früheren Versionen werden hier zur Vermeidung von Asymmetrien beide Richtungen (r und α) simultan behandelt.

5.4 Kraft- und Druckterme

Die Kraftterme bestehen aus Gravitation und den fiktiven, durch die Koordinatentransformation verursachten Trägheitskräften. Der Druck setzt sich zusammen aus üblichem Gas- und Strahlungsdruck, der aber bei Akkretion auf Weiße Zwerge nur eine untergeordnete Rolle spielt (s. Kap. 7). Die entsprechenden Terme in den Energiegleichungen werden simultan in diesem Teil mitberücksichtigt. Die Gleichungen dieses Teilschritts lauten dann

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{\text{Force}} &= r (g^2 + \cos^2 \alpha h^2) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r} + \lambda \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \\
 \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{\text{Force}} &= -\cos \alpha \sin \alpha h^2 - \frac{1}{r^2 \rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial E}{\partial \alpha} \right) \\
 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_{\text{Force}} &= (\gamma - 1) \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{u} \\
 \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{\text{Force}} &= \lambda \mathbf{u} \cdot (\nabla E) .
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Um eine bessere globale und auch lokale Energieerhaltung zu gewährleisten, wurde die folgende Aufteilung entwickelt, die zu einer (teilweisen) Zentrierung des Zeitschritts und damit einer höheren Genauigkeit führt. Zuerst werden unter Verwendung der bekannten Geschwindigkeiten und Drücke aus dem vorhergehenden Teilschritt Zwischenwerte der Energien berechnet (Gl. 5.6)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{i,j}^* &= \varepsilon_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} (\gamma - 1) \varepsilon_{i,j}^n (\nabla \cdot \mathbf{u})_{i,j} \\
 E_{i,j}^* &= E_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} (\lambda \mathbf{u} \cdot \nabla E)_{i,j} .
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

In Gl. (5.7) wurde der halbe Zeitschritt $\Delta t/2$ benutzt. Als Beispiel einer FDG¹²⁾ sei hier der Ausdruck für die Divergenz $(\nabla \cdot \mathbf{u})_{i,j}$ angegeben

$$(\nabla \cdot \mathbf{u})_{i,j} = 3 \frac{r_{i+1}^2 v_{i+1,j} - r_i^2 v_{i,j}}{r_{i+1}^3 - r_i^3} + \frac{\cos \alpha_{j+1} \omega_{i,j+1}^\alpha - \cos \alpha_j \omega_{i,j}^\alpha}{\sin \alpha_{j+1} - \sin \alpha_j} , \tag{5.8}$$

12) Generell bezeichnet in allen Differenzengleichungen $x_{i,j}$ die physikalische Größe x am Gitterpunkt (r_i, α_j) (a,b Gitter je nach Variable).

wobei immer das a-Gitter gemeint ist. Mit den in (5.7) berechneten Energien werden daraufhin die Zwischenwerte (zum Zeitpunkt $t^{n+1/2}$) der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} v_{i,j}^* &= v_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ r (\omega_\alpha^2 + \omega_\varphi^2 \cos^2 \alpha) - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r} + \lambda \frac{\partial E}{\partial r} \right) \right\}_{i,j} \\ (\omega_\alpha)_{i,j}^* &= (\omega_\alpha)_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ -\omega_\varphi^2 \cos \alpha \sin \alpha - \frac{1}{r^2 \rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial E}{\partial \alpha} \right) \right\}_{i,j} \end{aligned} \quad (5.9)$$

berechnet. Dabei gilt $\rho^* = (\gamma - 1) \rho \varepsilon^*$. Mit Hilfe von v^* , ω_α^* werden dann die neuen Energien ε^{n+1} , E^{n+1} unter Verwendung der zu (5.7) analogen Gleichung mit dem vollen Zeitschritt Δt und schließlich die neuen Geschwindigkeiten v^{n+1} , ω_α^{n+1} entsprechend aus Gl. (5.9) berechnet.

Im wesentlichen bedeutet dieses Verfahren ein Aufteilen des Zeitschritts in zwei gleichgroße Unterschritte. In Testrechnungen zeigte sich eine deutlich bessere globale Erhaltung der totalen Energie (Gl. 4.50), als bei der üblichen Einschrittmethode. Druck- und Kraftglieder müssen dabei simultan berechnet werden, um z.B. eine stabile, sich auch im *numerischen Gleichgewicht* befindliche, hydrostatischen Schichtung zu ermöglichen, in der sich $\frac{\partial p}{\partial r}$ und $\rho \frac{\partial \Psi}{\partial r}$ (in diskretisierter Form!) die Waage halten. Das gleiche gilt für (stabile) Kepler-Rotation, wo der Druckgradient durch den Trägheitsterm $r \rho \cos^2 \alpha h^2$ ersetzt wird. Die gleichzeitige Berücksichtigung der Energiegleichungen ist besonders vorteilhaft aus Gründen der Gesamtenergieerhaltung. Und zwar erhält man z.B. für den Strahlungsteil von Gl. (5.6)

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{Force}} = \lambda \mathbf{u} \cdot \nabla E \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{\text{Force}} = -\lambda \nabla E$$

durch Addition $-\frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right)_{\text{Force}} = 0$, was besagt, daß die Gesamtenergie (bis auf Diskretisierungsfehler) in diesem Teilschritt erhalten ist. Ähnliches gilt für die Gasenergie.

5.5 Viskositätsterme

Die Impulsgleichungen (4.41) entkoppeln in einen poloidalen und einen azimuthalen Teil. Der azimuthale Teil (Drehimpulsgleichung) wird mit der *Alternating Direction Implicit*, kurz ADI-Methode, (Peaceman & Rachford, 1955) gelöst. Im poloidalen Teil sind die zwei Gleichungen für v und g gekoppelt, was die Lösung etwas kompliziert. Es werden für diesen Fall zwei Lösungsmethoden angegeben, erstens eine modifizierte ADI-Methode und zweitens die *Successive Overrelaxation* (SOR)-Methode (z.B. Varga, 1962). Die Vor- und Nachteile von beiden Verfahren werden bei den

Testrechnungen diskutiert. Auch hier wird der entsprechende Dissipationsteil der Energiegleichung gleichzeitig mitbehandelt.

5.5.1 Drehimpulsdiffusion

Die Gleichung (4.41c) wird mit Hilfe von (4.45) in eine günstigere Form für die Bildung der Differenzengleichungen gebracht

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_{\text{Visc}} = \frac{1}{r^2 \rho} \left\{ 3 \frac{\partial}{\partial r^3} \left[\eta r^4 \frac{\partial h}{\partial r} \right] + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{\partial}{\partial \sin \alpha} \left[\eta \cos^3 \alpha \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right] \right\}. \quad (5.10)$$

Man erkennt, daß durch (5.10) der Drehimpuls lediglich umverteilt wird. Die Differenzengleichungen lauten dann (vgl. Abb. 5.1)

$$\begin{aligned} h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\rho_{i,j} (r_i^b)^2} & \left\{ \frac{1}{\cos^2 \alpha_j^b} \times \right. \\ & \frac{1}{\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a} \left[\bar{\eta}_{i,j+1}^\alpha \cos^3 \alpha_{j+1}^a \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{\alpha_{j+1}^b - \alpha_j^b} - \bar{\eta}_{i,j}^\alpha \cos^3 \alpha_j^a \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b} \right] + \\ & + \frac{3}{(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3} \left[\bar{\eta}_{i+1,j}^r (r_{i+1}^a)^4 \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{r_{i+1}^b - r_i^b} - \bar{\eta}_{i,j}^r (r_i^a)^4 \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{r_i^b - r_{i-1}^b} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

In Gl. (5.11) bezeichnen $\bar{\eta}^r$ und $\bar{\eta}^\alpha$ die an den Zellgrenzen interpolierten Werte von η (vgl. Gl. A3.3, A3.4). Die Werte von h in der geschweiften Klammer auf der rechten Seite sind im impliziten Fall zum Zeitpunkt t^{n+1} gegeben. In dieser Form geschrieben, erhält Gl. (5.11) den totalen Drehimpuls exakt, wenn an den Grenzen des Rechenbereichs keine Drehmomente angreifen, d.h. wenn an den Rändern $T_{r\varphi} = T_{\alpha\varphi} = 0$ gilt, was mit einer verschwindenden normalen Ableitung von h identisch ist. Durch Umgruppieren kann Gl. (5.11) in die Form

$$A h_{i-1,j}^{n+1} + C h_{i+1,j}^{n+1} + D h_{i,j-1}^{n+1} + E h_{i,j+1}^{n+1} + (1 + B^r + B^\alpha) h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n \quad (5.12)$$

gebracht werden, wobei die Vorfaktoren A, B , etc. (s. Gl. A3.2) konstant sind.

Die ADI-Methode löst Gl. (5.12) nun in zwei Schritten (mit jeweils dem *halben* Zeitschritt in Gl. 5.11!), dem r -Scan und dem α -Scan¹³⁾. Bei jedem Scan wird jeweils nur die Ableitung in der einen Koordinatenrichtung implizit berechnet, in der komplementären dagegen explizit. Für den r -Scan lautet das Gleichungssystem

13) Scan bedeutet hier der durchgehende Ablauf in einer (Koordinaten-) Richtung.

$$A h_{i-1,j}^{n+1/2} + (1 + B^r) h_{i,j}^{n+1/2} + C h_{i+1,j}^{n+1/2} = -D h_{i,j-1}^n - E h_{i,j+1}^n - (B^\alpha - 1) h_{i,j}^n \quad (5.13a)$$

und für den α -Scan

$$D h_{i,j-1}^{n+1} + (1 + B^\alpha) h_{i,j}^{n+1} + E h_{i,j+1}^{n+1} = -A h_{i-1,j}^{n+1/2} - (B^r - 1) h_{i,j}^{n+1/2} - C h_{i+1,j}^{n+1/2}. \quad (5.13b)$$

Dabei stellen die Größen zum Zeitpunkt $t^{n+1/2}$ die Zwischenwerte nach dem ersten Scan¹⁴⁾ dar, und die Vorfaktoren A, B , etc. sind nur *halb* so groß wie in Gl. (5.12). Der eindeutige Vorteil von Gl. (5.13) ist, daß an Stelle einer großen $(N^r \cdot N^\alpha) \times (N^r \cdot N^\alpha)$ Bandmatrix nur $(N^r + N^\alpha)$ mal Tridiagonalmatrizen der Ordnung N^r bzw. N^α gelöst werden müssen.

5.5.2 Diffusion des poloidalen Impulses

Aus der Impulsgleichung (4.41) und den Komponenten des viskosen Spannungstensors (4.45) erhält man die folgende kompakte Form für den poloidalen Teil

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{\text{visc}} = \frac{1}{r\rho} \left\{ 3 \frac{\partial}{\partial r^3} (r^3 \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \sin \alpha} (\cos \alpha \tau_{\alpha r}) \right\} \quad (5.14)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{\text{visc}} = \frac{1}{r^2 \rho} \left\{ 3 \frac{\partial}{\partial r^3} (r^3 \tau_{\alpha r}) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \hat{\tau}_{\alpha\alpha} + 2g (\tan \alpha \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \eta) \right\}, \quad (5.15)$$

wobei die Definition $\hat{\tau}_{\alpha\alpha} \equiv \tau_{\alpha\alpha} - 2\omega\eta \tan \alpha$ verwendet wurde. Bei der Ableitung von (5.14) und (5.15) wurde die Tatsache berücksichtigt, daß die Spur von τ in allen Koordinatensystemen verschwindet. Für die Komponenten τ_{rr} und $\hat{\tau}_{\alpha\alpha}$ findet man

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \frac{2}{3} \eta \left[2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial \sin \alpha} (\cos \alpha g) \right] \\ \hat{\tau}_{\alpha\alpha} &= \frac{2}{3} \eta \left[2 \frac{\partial}{\partial \sin \alpha} (\cos \alpha g) - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.16a,b)$$

Offensichtlich ist es günstig τ_{rr} und $\hat{\tau}_{\alpha\alpha}$ in den Mitten der Gitterzellen (wie ρ, E , etc.) zwischen den Geschwindigkeiten zu definieren, wohingegen $\tau_{\alpha r}$ an den Schnittpunkten der Gitterränder lokalisiert ist. Die Differenzengleichungen von (5.14, 5.15) sind dann unter Berücksichtigung von Abb. (5.1) leicht zu erhalten. Für $\tau_{\alpha r}$ findet man z.B. (s. Gl. 4.45)

$$\tau_{i,j}^{\alpha r} = \tilde{\eta}_{i,j} \left(r_i^a \frac{g_{i,j} - g_{i-1,j}}{r_i^b - r_{i-1}^b} + \frac{1}{r_i^a} \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b} \right), \quad (5.17)$$

14) N.b. 5.13 a und b können auch vertauscht werden.

wobei $\tilde{\eta}_{i,j}$ der interpolierte Viskositätskoeffizient, am Gitterpunkt $(r_i^a, \alpha_j^a)^{15)}$ definiert, ist (vgl. Gl. A4.7).

Bevor die implizite Lösung der Gln. (5.14, 5.15) genauer erläutert wird, seien noch ein paar Worte zur expliziten Methode verloren. Dabei werden zuerst mit Hilfe von Gl. (5.17) etc. die Komponenten des Spannungstensors zum Zeitpunkt t^n berechnet, und Einsetzen in die FD-Version von (5.14) und (5.15) liefert sofort neue Werte v^{n+1} und g^{n+1} . Das Verfahren ist recht einfach, schnell und kann durch Vektorisierung noch deutlich beschleunigt werden. Wie bereits erwähnt, ist jedoch eine implizite Methode zur Umgehung der Zeitschrittbeschränkung (5.3) unumgänglich.

Im impliziten Fall werden zunächst die Gln. (5.16) in (5.14, 5.15) eingesetzt, und dann die FDG gebildet. Nach Sortieren der Terme mit gleichen Indizes erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} W^r v_{i-1,j} + E^r v_{i+1,j} + S^r v_{i,j-1} + N^r v_{i+1,j} + C^r v_{i,j} = \\ + \tilde{D}^r g_{i-1,j} + \tilde{E}^r g_{i,j} + \tilde{F}^r g_{i-1,j+1} + \tilde{G}^r g_{i,j+1} = v_{i,j}^n \end{aligned} \quad (5.18a)$$

und

$$\begin{aligned} W^\alpha g_{i-1,j} + E^\alpha g_{i+1,j} + S^\alpha g_{i,j-1} + N^\alpha g_{i+1,j} + C^\alpha g_{i,j} = \\ + \tilde{D}^\alpha v_{i,j-1} + \tilde{E}^\alpha v_{i,j} + \tilde{F}^\alpha v_{i+1,j-1} + \tilde{G}^\alpha v_{i+1,j} = g_{i,j}^n \end{aligned} \quad (5.18b)$$

Dabei sind die Geschwindigkeiten auf der linken Seite zum Zeitpunkt t^{n+1} zu nehmen, und die Koeffizienten (s. Anh. AS) sind Funktionen von r, α, ρ, η , und Δt . In beiden Gleichungen (5.18) sind jeweils neun Gitterzellen gekoppelt, allerdings verschiedene wegen der Gitterdefinitionen. Offensichtlich sind die Gln. (5.18) komplizierter als die der Drehimpulsdiffusion, und daher ist eine andere Lösungsmethode nötig. Es werden hier zwei unterschiedliche Verfahren beschrieben, erstens eine modifizierte ADI-Methode und zweitens die SOR-Methode.

5.5.2.1 ADI - Methode

Im ADI-Fall wird ähnlich verfahren wie es Robertson & Frank (1986) beschrieben haben. Sie benutzten allerdings ein anderes Gitter, bei dem u_r and u_θ am gleichen Gitterpunkt definiert waren. Das System (5.18) wird also wieder in zwei Schritten (Scans) gelöst, wobei allerdings, wie Robertson & Frank (1986) angeben, eine leichte Asymmetrie des Zeitschritts in Kauf genommen werden muß. Die Gleichung für den r-Scan ist von der Form

15) Dort ist auch $T_{i,j}^{\alpha r}$ definiert.

$$G_r^{n+1/2}(v_{i-1,j}, v_{i,j}, v_{i+1,j}, g_{i-1,j}, g_{i,j}, g_{i+1,j}) = H_r^n(v \text{ und } g \text{ an } 5 \text{ Gitterzellen}) \quad (5.19a)$$

und für den α -Scan

$$G_\alpha^{n+1}(v_{i,j-1}, v_{i,j}, v_{i,j+1}, g_{i,j-1}, g_{i,j}, g_{i,j+1}) = H_\alpha^{n+1/2}(v \text{ und } g \text{ an } 5 \text{ Gitterzellen}). \quad (5.19b)$$

Die Funktionen G und H sind dabei lineare Funktionen der Argumente, die am angegebenen Zeitschritt evaluiert werden. Die resultierenden 2×2 block-tridiagonalen Gleichungssysteme können dann leicht durch ein Eliminationsverfahren und anschließendes rückwärtiges Einsetzen gelöst werden.

5.5.2.2 SOR - Methode

Im SOR-Fall werden die zwei Gleichungssysteme (5.18) simultan durch ein iteratives Verfahren gelöst. Im einzelnen wird die folgende Prozedur (genauer z.B. in Var-ga (1962) erläutert) verwendet

$$x_r^* = [v_{i,j} - (\text{linke Seite von (5.18a) ohne zentralen } (C^r)\text{-Term})] / C^r \quad (5.20a)$$

$$v_{i,j} = x_r^* \cdot \delta + (1 - \delta) \cdot v_{i,j}$$

$$x_\alpha^* = [g_{i,j} - (\text{linke Seite von (5.18b) ohne zentralen } (C^\alpha)\text{-Term})] / C^\alpha \quad (5.20b)$$

$$g_{i,j} = x_\alpha^* \cdot \delta + (1 - \delta) \cdot g_{i,j}.$$

Die Gleichungen (5.20), d.h. die Berechnung von neuen (Zwischen!)-Werten der Geschwindigkeiten aus den Hilfsgrößen x^* und dem sog. *Relaxationsparameter* δ , werden wiederholt angewendet bis ein vorgegebenes Abbruchkriterium erfüllt ist. Z.B. bis die relativen Änderungen bei *allen* $v_{i,j}$ und $g_{i,j}$ in einer Iteration kleiner sind als 10^{-6} , oder bis die anfängliche Residuumsnorm um einen bestimmten Faktor der gleichen Größenordnung reduziert wurde.

Die Gleichungen (5.20) werden mit dem sog. *Schachbrett-Algorithmus* iteriert. Das bedeutet, daß zuerst nur die geraden Gitterpunkte, d.h. $i+j=\text{gerade}$, berücksichtigt werden und dann im zweiten "Schwung" die ungeraden. Dies führt zu einer gleichmäßigeren Konvergenz für alle Variablen. Der optimale Relaxationsparameter δ ist durch

$$\delta = 2 / (1 + \sqrt{1 - r_s^2}), \quad (5.21)$$

gegeben, wobei r_s eine Approximation an den spektralen Radius¹⁶⁾ ρ_s der Iterationsmatrix M darstellt. Nur bei $\rho_s < 1$ konvergiert das Iterationsverfahren. Nach Varga (1962) kann als Abschätzung von r_s die maximale Zeilen- (oder Spalten-) summe der Absolutbeträge der Nichtdiagonalelemente dienen

$$r_s = \max_j \sum_{i \neq j} |M_{i,j}|. \quad (5.22)$$

Es sei hier bemerkt, daß für $\delta = 1$ SOR in die Gauß-Seidel Iteration übergeht. Häufig ist nun die Berechnung von δ nach (5.21) nicht möglich, weil r_s , nach (5.22) berechnet, größer als 1 ist. Aus diesem Grund ist es günstig, δ bei seinem optimalen Wert einzuschachteln. D.h., zu dem Wert aus dem letzten Zeitschritt wird eine kleine Größe addiert und, falls jetzt weniger Iterationsschritte benötigt werden, wird nochmals die gleiche Korrektur angewandt, andernfalls das Vorzeichen umgekehrt. Durch diese Prozedur oszilliert δ um seinen optimalen Wert, bei dem die Iterationszahl ein Minimum ist.

Alle hier beschriebenen Lösungsmethoden (explizit, ADI, SOR) wurden implementiert und an einem Problem mit analytischer Lösung getestet (Abschn. 6.1.2).

Weil Reibung zu einer Dissipation von Energie führt, muß in diesem Teilschritt ebenfalls die Gasenergie (Gl. 4.43) korrigiert werden. Die freigesetzte Energie wird mit Hilfe eines geeigneten Mittels aus der alten Dissipationsfunktion Φ^n und der neuen Φ^{n+1} berechnet

$$\varepsilon_{i,j}^{n+1} = \varepsilon_{i,j}^n + \Delta t (f_\phi \Phi_{i,j}^n + [1 - f_\phi] \cdot \Phi_{i,j}^{n+1}). \quad (5.23)$$

Der Wert von f_ϕ liegt normalerweise bei 1/2, aber bei großen Änderungen der Geschwindigkeiten in einem Zeitschritt muß ein kleinerer Wert gewählt werden, weil es sonst zu einem unrealistischen Anstieg der inneren Energie kommt. Dadurch, daß der Zeitschritt sehr viel größer als die theoretische Grenze (wohlgermerkt bei expliziten Methoden, Gl. (5.3)) sein kann, kommt es zu dieser Dezentrierung des Zeitschritts. Als günstig hat sich folgende Beziehung zur Bestimmung von f_ϕ erwiesen

$$f_\phi = \frac{1}{2} (\Phi_T^{n+1} / \Phi_T^n)^2, \quad (5.24)$$

wobei Φ_T die *gesamte* dissipierte Energie darstellt, $\Phi_T = \sum_{i,j} \Phi_{i,j}$. Weil i.a. $\Phi_T^{n+1} < \Phi_T^n$ ist, folgt $f_\phi < 0.5$. Bei starken Änderungen (= kleines f_ϕ) wird also das Gewicht mehr nach $\Phi_{i,j}^{n+1}$ verschoben, um zuviel Dissipation zu vermeiden.

16) Der spektrale Radius einer Matrix ist der betragsmäßig größte Eigenwert.

5.6 Radiativer Teil

Der radiative Teil umfaßt die Kühl- und Heizterme, den Diffusionsteil und den $\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P})$ -Term und betrifft nur die beiden Energiegleichungen. Der zu lösende Teil des Gleichungssystems lautet (s. Gl. 4.37, 4.43)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \tilde{\Lambda}(E, T) \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\rho}{(\gamma-1)} \cdot \tilde{\Lambda}(E, T) + f_d \nabla \left(\frac{\lambda}{\rho(\chi+\sigma)} \nabla E \right) - \nabla \cdot (E \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_{\text{Edd}}). \quad (5.26)$$

Dabei ist $\tilde{\Lambda}$, definiert durch $\tilde{\Lambda} = -(\gamma-1) \cdot \Lambda / \rho$, eine nichtlineare Funktion der Temperatur (s. Gl. 4.47). Gl. (5.25) wurde aus der idealen Gasgleichung abgeleitet¹⁷⁾. Der Diffusionskoeffizient f_d in (5.26) ist der nach der Normierung der Gleichungen verbliebene Vorfaktor, der gerade mit der dimensionslosen Lichtgeschwindigkeit identisch ist, $f_d = c/u_0$. Das Gleichungssystem (5.25) und (5.26) muß ebenfalls implizit gelöst werden, weil die radiativen Diffusionszeitskalen oder die Kühlungs- bzw. Heizungszeitskalen *wesentlich* kürzer als die dynamischen sein können.

5.6.1 Vorüberlegungen

Es wurde zunächst versucht, als Vereinfachung das System (5.25, 5.26) in zwei Schritte zu unterteilen, indem zuerst die nicht-linearen Kühl- und Heizterme berechnet werden und danach die restlichen. Die Differenzengleichungen des ersten Teils sind von der Form

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \Delta t \cdot \tilde{\Lambda}(E_{i,j}^{n+1}, T_{i,j}^{n+1}) \quad (5.27)$$

$$E_{i,j}^{n+1} = E_{i,j}^n - \frac{\Delta t \cdot \rho_{i,j}}{\gamma-1} \cdot \tilde{\Lambda}(E_{i,j}^{n+1}, T_{i,j}^{n+1}). \quad (5.28)$$

Weil $\tilde{\Lambda}$ linear in E ist, kann die Gl. (5.28) explizit nach $E_{i,j}^{n+1}$ aufgelöst werden, und durch Einsetzen in (5.27) erhält man eine implizite Gleichung für die Temperatur

$$T_{i,j}^{n+1} = f(T_{i,j}^{n+1}, T_{i,j}^n, E_{i,j}^n). \quad (5.29)$$

Die Funktion f ist dabei ein Polynom (oder auch eine allgemeinere nicht-lineare Funktion) in ihrem ersten Argument. Die Gl. (5.29) kann nun einfach durch *Newton-Raphson*-Iteration für jeden Gitterpunkt einzeln gelöst werden. Mit den gewonnenen $T_{i,j}^{n+1}$ können dann die neuen Werte der Strahlungsenergie $E_{i,j}^{n+1}$ nach Gl. (5.28) berech-

17) In dimensionslosen Einheiten gilt $T = (\gamma-1) \varepsilon$.

net werden. Der zweite Teil (Diffusion, $\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P})$) führt zu FDG der Form (5.12), wie bei der Drehimpulsdiffusion. Die ADI-Methode ist hier trotz ihrer generellen Stabilität nicht anwendbar, weil sie, wie Testrechnungen zeigten, häufig zu physikalisch unsrealistischen negativen Energien (bzw. Temperaturen) führt. Dies ist verursacht durch die explizite Behandlung der komplementären Richtung in jedem Scan. Wenn die Diffusionszeitskalen sehr kurz sind, wird bei expliziter Lösung zuviel Energie in einem Zeitschritt hinausdiffundieren. Um dieses Problem zu vermeiden, wurde der SOR-Algorithmus angewandt, der hier allerdings einfacher als bei dem viskosen Teil ist.

Der Nachteil der Lösung von Gl. (5.25, 5.26) in zwei Schritten (Kühlung/Heizung, Diffusion) ist nun gerade die getrennte Behandlung der einzelnen Teile. Wenn die Zeitskalen für die beiden Prozesse wesentlich kleiner als die dynamischen (durch Δt gegeben) sind, so beeinflussen sie sich gegenseitig stark. So haben eindimensionale Testrechnungen gezeigt, daß selbst in Gleichgewichtsfällen durch die Entkopplung von Kühlung/Heizung und Diffusion die numerische Lösung zwischen zwei Werten pendelte, weil der eine Teil immer die Korrektur des anderen überkompensierte. Deswegen waren auch oft sehr viele Iterationen bei der Newton-Methode notwendig, was die Effizienz stark herabsetzte. Diesem Problem kann durch wiederholte Anwendung in einem Zeitschritt etwas abgeholfen werden, jedoch bleibt die Frage offen, wieviel Unterteilungen von Δt notwendig sind.

Die simultane Lösung der Gln. (5.25, 5.26) ist also eindeutig allen anderen vorzuziehen. Es wurden zwei Lösungsmethoden entwickelt, die in unterschiedlichen Situationen der Rechnungen Anwendung finden.

5.6.2 Vollständige Linearisierung

Grundzüge dieser Methode sind in einem ähnlichen Kontext im eindimensionalen Fall von Chevalier & Klein (1979) beschrieben worden. Hier geht man von den finiten Differenzengleichungen des vollständigen Systems (5.25, 5.26) aus (s. Gl. A5.2, A5.3) und macht zunächst eine Taylor-Entwicklung um $(T_{i,j}^{n+1}, E_{i,j}^{n+1})$ unter Berücksichtigung der Terme bis zur ersten Ordnung. Also gilt

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{n+1} &= T_{i,j}^* + \delta T_{i,j} \\ E_{i,j}^{n+1} &= E_{i,j}^* + \delta E_{i,j}, \end{aligned} \tag{5.30}$$

wobei $(T_{i,j}^*, E_{i,j}^*)$ Näherungswerte an $(T_{i,j}^{n+1}, E_{i,j}^{n+1})$ seien. Nach Einsetzen der Entwicklung in die FDG, kann die Temperaturgleichung (s. a. Gl. 5.27) nach den Korrekturen $\delta T_{i,j}$ aufgelöst werden, und man erhält

$$\delta T_{i,j} = f(\delta E_{i,j}, T_{i,j}^*, E_{i,j}^*, T_{i,j}^n, E_{i,j}^n). \quad (5.31)$$

Weil die Funktion f wieder linear in $\delta E_{i,j}$ ist, führt Einsetzen von Gl. (5.31) zusammen mit der Taylor-Entwicklung (5.30) in die FDG der Strahlungsenergie (Gl. A5.7) zu folgendem linearen Gleichungssystem für die Energiekorrekturen $\delta E_{i,j}$:

$$A \delta E_{i-1,j} + B \delta E_{i,j} + C \delta E_{i+1,j} + D \delta E_{i,j-1} + E \delta E_{i,j+1} = R. \quad (5.32)$$

Die Koeffizienten und die rechte Seite sind i.a. Funktionen von $T_{i,j}^*, E_{i,j}^*, T_{i,j}^n, E_{i,j}^n$ und natürlich von ρ und Δt . Die Ableitung von Gl. (5.32) und die genaue Form der Koeffizienten sind im Anhang (A5) genauer beschrieben. Aus den $N_r \times N_\alpha$ Gleichungen (5.32) werden nun die Korrekturen $\delta E_{i,j}$ berechnet und anschließend mit (5.27) die Temperaturkorrekturen $\delta T_{i,j}$. Als erste Näherung werden dabei für $(T_{i,j}^*, E_{i,j}^*)$ die bekannten Werte $(T_{i,j}^n, E_{i,j}^n)$ oder eine geeignete Abschätzung der neuen Werte zum Zeitpunkt t^{n+1} verwendet. Sind die relativen Korrekturen $(\delta E/E^*, \delta T/T^*)$ größer als ein vorgegebener Grenzwert, so werden nach (5.30) neue $(T_{i,j}^*, E_{i,j}^*)$ statt $(T_{i,j}^{n+1}, E_{i,j}^{n+1})$ berechnet und erneut mit (5.32) neue Korrekturen ermittelt. Dieser iterative Prozeß ist beendet, wenn alle relativen Korrekturen kleiner als ein vorgegebener Grenzwert (typisch etwa 10^{-7} bis 10^{-6}) sind.

In der Anfangsphase der Rechnungen (Kap. 7) sind relativ viele Iterationen (10-20) zur Lösung von (5.32) notwendig, wohingegen später i.a. 3-4 ausreichen. Dies liegt daran, daß in Phasen mit starken Änderungen des Strahlungsfeldes, wie es kurz nach Beginn der Rechnungen der Fall ist, mehr Iterationen als bei langsamer Variation nötig sind. Da bei jeder Iteration die $((N_r \times N_\alpha) \times (N_r \times N_\alpha))$ (hier i.a. $N_r = N_\alpha = 61$) Matrixgleichung (5.32) gelöst werden muß, ist ein effizienter Algorithmus dafür besonders wichtig.

Es muß eingestanden werden, daß hier die optimale Lösung wahrscheinlich noch nicht gefunden wurde. Da die schnelle ADI-Methode hier, ebenso wie vorher, zu negativen Energien führte, wurden zunächst zwei unterschiedliche iterative Verfahren implementiert.

Zusätzlich zu dem oben beschriebenen SOR-Verfahren ist dies die sog. *Incomplete Cholesky (Decomposition) Conjugate Gradient* (ICCG) Methode, die von Meijerink & van der Vorst (1977) und Kershaw (1978, 1980) entwickelt wurde und genauer im Anhang (A7) beschrieben ist. Es zeigte sich, daß bei beiden Verfahren sehr viele Iterationen (≈ 100) nötig sind, um zu einer Konvergenz zu kommen, wobei in vielen Fällen die Methoden gar nicht bzw. extrem langsam (schleichend) konvergierten. Die ICCG-Methode braucht zwar i.a. wesentlich weniger Iterationen, ist aber bedeutend aufwendiger als SOR. Die schlechte Konvergenz liegt offensichtlich an den

teilweise sehr kleinen Elementen des Lösungsvektors im Vergleich zu den Koeffizienten der Matrix bzw. der rechten Seite der Gleichungen. Renormierung der Matrix (z.B. Diagonalelemente = 1) verbesserte zwar die Konvergenzeigenschaften leicht, konnte aber letztlich die Iterationszahl nicht stark verringern.

Als Alternative wurde eine Routine der NAG-Programmbibliothek zur (direkten) Lösung von dünn besetzten Matrizen eingebunden. Diese benötigt zwar ebenfalls viel Rechenzeit (einige CPU Sekunden bei einer 3600×3600 Matrix), führt dann aber zu einer sinnvollen Lösung im Vergleich zu einer nicht-auskonvergierten iterativen. Da jedoch für längere Rechnungen dieser hohe Rechenzeitverbrauch ebenso nicht tragbar ist, erscheint die Untersuchung weiterer Verbesserungsmöglichkeiten notwendig. Trotz allem wird momentan diese Methode zur Lösung der Matrixgleichung in der Anfangsphase der Rechnungen verwendet, d.h. in einem Entwicklungsstadium, in dem sich die Strahlungsenergie schnell ändert. In ruhigen quasi-stationären Phasen wird statt dessen eine Variante der vollständigen Linearisierung (hier teilweise Linearisierung genannt) verwendet, bei der die Lösung der Matrixgleichung bedeutend schneller ist.

5.6.3 Teilweise Linearisierung

Hierbei wird zunächst genauso wie oben vorgegangen. Die FDG für die Temperatur und die Strahlungsenergie werden wieder in eine Taylor-Reihe entwickelt (Gl. 5.30). Aber jetzt wird nicht nach δT , bzw. δE aufgelöst, sondern man ersetzt unter der Annahme $T^* \approx T^n$, $E^* \approx E^n$ die Korrekturen in den FDG durch

$$\begin{aligned}\delta E_{i,j} &= E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n \\ \delta T_{i,j} &= T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n\end{aligned}\tag{5.33}$$

Die Gl. (5.33) ist natürlich nur bei langsamen Änderungen, (d.h. $\delta E_{i,j}$, $\delta T_{i,j}$ klein) der entsprechenden Größen gültig. Man erhält also eine lineares Gleichungssystem direkt für die neuen Größen ($T_{i,j}^{n+1}$, $E_{i,j}^{n+1}$)

$$A E_{i-1,j}^{n+1} + B E_{i,j}^{n+1} + C E_{i+1,j}^{n+1} + D E_{i,j-1}^{n+1} + E E_{i,j+1}^{n+1} = R.\tag{5.34}$$

Diese Methode ist äquivalent zu jener der vollständigen Linearisierung, wenn nur eine Iteration benötigt würde. Da i.a. selbst in günstigeren Fällen mit 2-4 Iterationen zu rechnen ist, würde die einmalige Verwendung von (5.34) pro Zeitschritt eine größere Ungenauigkeit bedeuten. Wenn nun das zu behandelnde Problem zu einem quasi-stationären Zustand führt, in dem auch nur wenige Iterationen bei der vollständigen

Linearisierung nötig sind, so wird stattdessen diese neue Methode, allerdings mehrfach (ca. 3-5 mal) in einem Zeitschritt, verwendet.

Dem ersten Anschein nach ist nichts gewonnen, denn die Zahl der notwendigen Matrixlösungen ist unverändert geblieben. Die Rechnungen zeigen aber, daß die Gl. (5.34) wesentlich gutartiger ist als (5.32) und nur wenige Iterationen (10-20) mit der ICCG-Methode zur Lösung ausreichen. Das einfachere SOR-Verfahren konvergiert immer noch recht langsam. Damit ist diese zweite Methode der teilweisen Linearisierung bedeutend effizienter geworden als die vollständige Linearisierung. Allerdings sei nochmals auf die Beschränkung der Methode auf langsame Änderungen des Strahlungsfeldes hingewiesen.

Es ist aber durchaus möglich, daß generell bei beiden Methoden beschleunigende Maßnahmen wie z.B. Präkonditionierungen zur Verbesserung der Konvergenz führen.

6 Tests, Randbedingungen und vorbereitende Rechnungen

6.1 Tests

Jede neuentwickelte numerische Methode bedarf vor ihrer Anwendung ausführlicher Tests. Dies ist besonders wichtig bei so komplexen und aufwendigen Rechnungen, wie sie bei hydrodynamischen Aufgabenstellungen vorliegen. Am besten geeignet zur Überprüfung der Anwendbarkeit eines numerischen Verfahrens ist der Vergleich von berechneter zu bekannter (günstigstenfalls analytischer) Lösung eines wohldefinierten Testproblems. Bei einem so umfangreichen Programm, wie es im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde, ist die gleichzeitige Überprüfung aller seiner Teile (von Advektion bis Strahlungstransport) nicht möglich. Daher wurde hier die Strategie verfolgt, die einzelnen Teile des Programms separat genau an Problemen mit bekannter Lösung zu testen. Da einige Testrechnungen schon in KH beschrieben wurden, werden hier nur die neueren erläutert.

6.1.1 Advektions- und Kraftterme

Die Fähigkeit des Codes, bewegte Schockfronten und Kontaktdiskontinuitäten zu behandeln, wurde bereits in KH durch Anwendung auf das eindimensionale Riemann-Problem in kartesischen Koordinaten gezeigt. Dabei wurde der gleiche Parametersatz verwendet wie von Sod (1978) in seiner vergleichenden Studie über 'Riemann-solvers'. In sphärischen Polar-Koordinaten ist die analytische Lösung des druck-

losen Kollapses einer isothermen, selbst-gravitierenden Gaswolke hervorragend reproduziert worden (KH). Wird der Gasdruck mitberücksichtigt, so ergibt sich der typische r^{-2} -Abfall für die Dichte. Um das Verhalten der Methode bei zweidimensionalen Problemen zu testen, sind einige Rechnungen zum Bondi-Hoyle-Problem der Akkretion aus einem Wind durchgeführt worden. Dabei wird die achsialsymmetrische Umströmung ei-

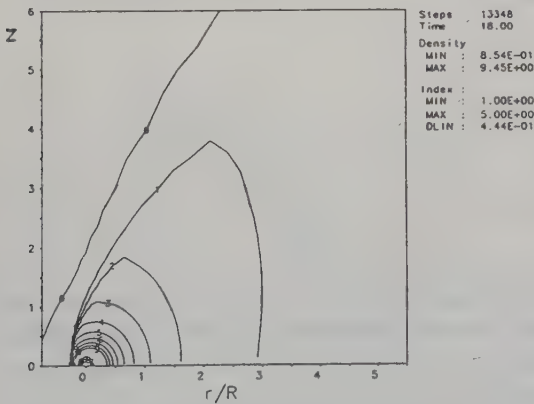


Abb. 6.1

Dichtekonturen beim Bondi-Hoyle Windakkretionsproblem.
(Labels in aufsteigender Reihenfolge)

nes gravitierenden Körpers (Sphäre) mit einem reibungsfreien idealen Gas betrachtet. Falls die Strömung supersonisch ist, und das zentrale Objekt voll akkretierend, bildet sich ein 'Bow Shock' um den Körper. Weil für dieses Problem keine analytische Lösung existiert, wurden einige numerische Untersuchungen durchgeführt (z.B. Hunt, 1971; Shima *et al.*, 1985; oder kürzlich Fryxell *et al.*, 1987, die PPM benutzten). Die genaue Formulierung des Problems und weitere Referenzen sind in Shima *et al.* angegeben. Bei den Testrechnungen wurden ähnliche Parameter wie dort verwendet. Die Abb. (6.1) zeigt die Linien gleicher Dichte (Isodensiten) für eine Machzahl 1.4 und einem Verhältnis der spezifischen Wärmen von 5/3 für den Fall eines akkretierenden Objekts (offener innerer Rand). Die qualitative Übereinstimmung mit Abb. 2 in Shima *et al.* ist augenscheinlich. Um auch eine quantitative Übereinstimmung zu erhalten, müßte die innere Randbedingung genau identisch sein. Die Ergebnisse stimmen auch gut im Fall einer undurchlässigen gravitierenden Kugel überein. Die Höhenlinien für die spezifische Entropie, welche in dimensionsloser Form $s = \ln(\rho/\rho^\gamma)/(\gamma-1)$ lautet, sind in Abb. (6.2) dargestellt.

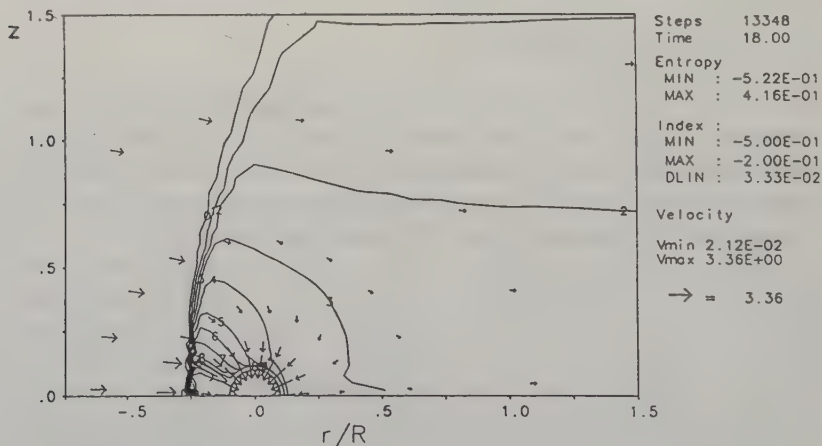


Abb. 6.2 Linien gleicher spez. Entropie und Geschwindigkeitspfeile für das Bondi-Hoyle Windakkretionsproblem (siehe Text).

Wie theoretisch zu erwarten ist (wegen $\mathbf{u} \cdot \nabla s = 0$), folgt die Strömung außerhalb des Schockbereichs Isentropen. Die Geschwindigkeitspfeile verlaufen also parallel zu diesen Linien bis auf einen kleinen Bereich in der Nähe des inneren Randes, der durch die Randbedingung gestört wird.

In eindimensionalen Testrechnungen mit abgeschlossenen Randbedingungen, d.h. verschwindenden Geschwindigkeiten und Flüssen ($\mathbf{u} = \mathbf{F} = 0$) hat sich erwiesen, daß die simultane Behandlung der Terme in der Impuls- und Energiegleichung, wie sie in

Abschnitt (5.4) beschrieben wurden¹⁸⁾, die Erhaltung der Gesamtenergie (Gl. 4.50) numerisch am besten gewährleistet.

Mit diesen extensiven Testrechnungen für reibungsfreie Strömungen ist die Genauigkeit der Methode für diesen Teilbereich im Rahmen der Diskretisierungsfehler sehr gut demonstriert worden. Speziell die Übereinstimmung mit einer vollkommen unterschiedlichen numerischen Methode wie dem Algorithmus von Osher, den Shima *et al.* verwendeten, ist ermutigend.

6.1.2 Reibungsterme

Im Fall der Diffusion des poloidalen Impulses (Gl. 5.14, 5.15) wird hier das Stokes' Problem einer inkompressiblen Strömung um eine feste Kugel mit undurchlässigem Rand bei konstanter Scherviskosität η betrachtet. Die genaue Spezifizierung des numerischen Problems einschließlich der Anfangs- und Randbedingungen ist in KH ausführlich beschrieben, so daß hier nur die Ergebnisse der Tests, die nun, im Gegensatz zu KH, mit der impliziten Methode erfolgten, dargestellt werden. Abb. (6.3) zeigt die Linien gleicher relativer Abweichung der berechneten von den theoretischen Werten (im folgenden auch kurz als *relativer Fehler* bezeichnet), für die radiale (a) und meridionale (b) Komponente der poloidalen Geschwindigkeit.

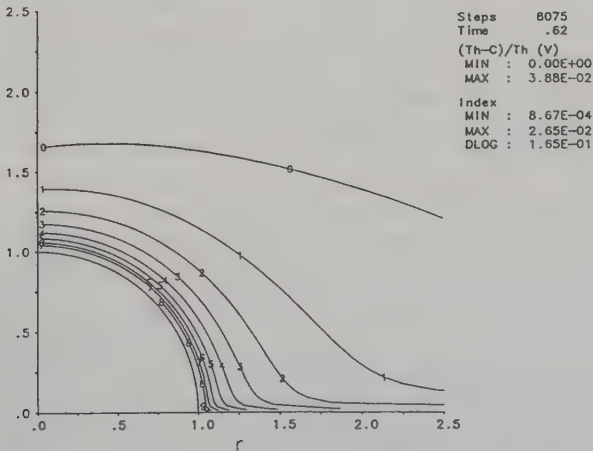


Abb. 6.3a Die Linien gleichen relativen Fehlers bei der Kugelumströmung für die radiale (v) Geschwindigkeit.

18) Z.B. der ∇p Term in der Impulsgleichung zusammen mit $p \nabla \cdot u$ in der Energiegleichung.

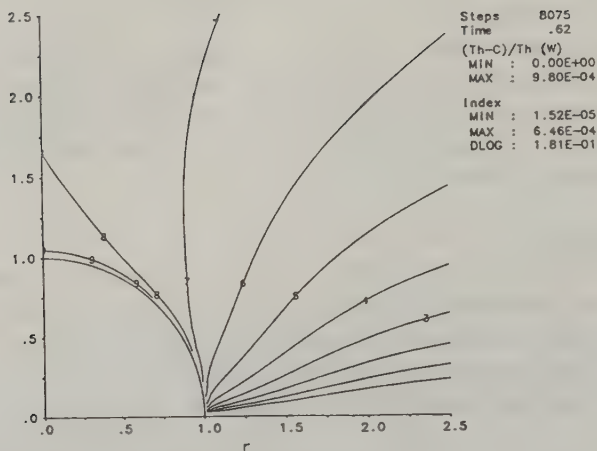


Abb. 6.3b Die Linien gleichen relativen Fehlers bei der Kugelumströmung für die meridionale (w , im Text g bzw. ω_α) Geschwindigkeit.

Die maximale Abweichung (noch kleiner als 5%) von den theoretischen Werten von v treten bei kleinem α und r auf, aber bei größeren Abständen vom Äquator und von der Kugeloberfläche nehmen die Fehler schnell ab (Abb. 6.3a). Die Ungenauigkeiten werden durch die starken (radialen) Gradienten von v in der Nähe der Kugel verursacht, wie Abb. (6.4) für den kleinsten α -Wert des b-Gitters verdeutlicht (man beachte dabei die logarithmische Skala der Ordinate).

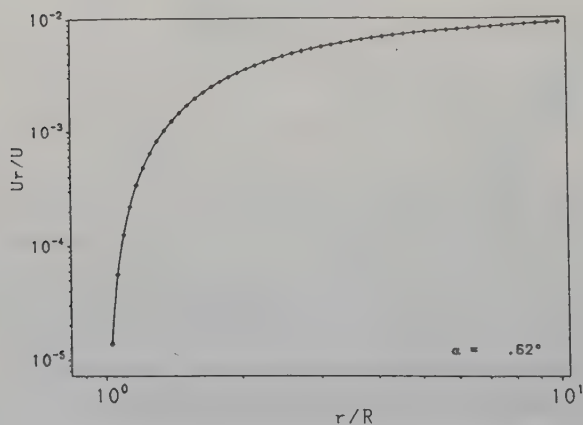


Abb. 6.4

Abhängigkeit der radialen Geschwindigkeit vom Radius bei einem Winkel $\alpha = 0.62^\circ$. Die durchgezogene Linie bezeichnet die analytische Lösung und die Rauten die numerische (vgl. Abb. 7 in KH).

Die Fehler bei der meridionalen (Winkel-) Geschwindigkeit g sind generell sehr viel kleiner, alle unter 0.1%, und sind ebenso an der Kugeloberfläche, bei den steilsten Gradienten, am größten (Abb. 6.3b). Die Absolutwerte der Divergenz der Strömung, dargestellt in Abb. (6.5), sind generell kleiner als 10^{-3} .

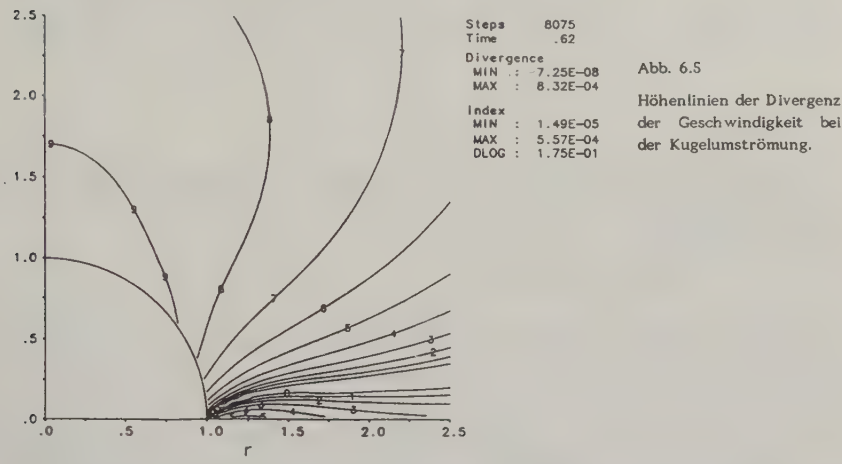


Abb. 6.5
Höhenlinien der Divergenz der Geschwindigkeit bei der Kugelumströmung.

Abschließend sei bemerkt, daß alle beschriebenen Methoden bei diesem Test identische Resultate lieferten¹⁹⁾. Außerdem waren die impliziten Methoden in der Tat auch bei größeren Zeitschritten vollkommen stabil im Gegensatz zur expliziten.

Ergänzend wurde noch der sphärisch-symmetrische Kollaps von Gas auf ein zentrales gravitierendes Objekt unter Einschluß der Viskosität untersucht. Im Fall von *großen* Einfallgeschwindigkeiten hat die ADI-Methode zu starken *nicht-radialsymmetrischen* Geschwindigkeiten g in der Nähe des inneren Randes geführt. Weil die Randbedingungen ausführlich überprüft wurden, hängt dies wahrscheinlich mit der numerischen Methode, und dabei insbesondere mit der Abweichung von der Zeitschrittzentrierung (s.a. Robertson & Frank, 1986), zusammen. Zur Vermeidung dieser Probleme wird generell die SOR-Methode zur Lösung des poloidalen Teils der Impulsgleichung (5.14, 5.15) verwendet.

Die Diffusion des Drehimpulses wurde gegen eine Gleichgewichtslösung von (5.10) für den Fall konstanten η getestet. Wenn in Gl. (5.10) $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$ gesetzt und nach separierbaren Lösungen der Form $\omega_\varphi = f(r)g(\alpha)$ ²⁰⁾ gesucht wird, muß folgende Gleichung gelöst werden

19) Dies ist bei Stationarität und vor allem gleichen Differenzengleichungen auch zu erwarten, und bestätigt eine korrekte Programmierung.

20) Mit g ist hier *nicht* die meridionale Geschwindigkeit gemeint, sondern eine beliebige Funktion.

$$\frac{1}{r^2 f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = C = - \frac{1}{\cos^3 \alpha g(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\cos^3 \alpha \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right). \quad (6.1)$$

Dabei ist C eine zu bestimmende Konstante. Macht man für $f(r)$ den Ansatz $f \sim r^n$ und nimmt $g(\alpha) \sim \sin^m \alpha \cos^k \alpha$ an, so folgt nach Einsetzen in Gl. (6.1), daß m nur die Werte 0 oder 1, und k nur 0 oder 2 annehmen kann. Die Konstante C wird in den 4 Fällen aus

$$C = [m(k+1) + k(m+1)] + 3m \quad (6.2)$$

berechnet und kann die Werte 0, 2 oder 4 annehmen. Der Exponent n folgt aus der quadratischen Gleichung

$$n^2 + 3n - C = 0. \quad (6.3)$$

Für die numerischen Testrechnungen wurde $C=2$, $k=2$ und $m=1$ gewählt, und die analytische Lösung zu (6.1) hat dann folgendes Aussehen

$$\omega_\varphi(r, \alpha) = \frac{1}{r \cos^2 \alpha} \left(A + \frac{B}{r} \right) \cdot (C + D \sin \alpha). \quad (6.4)$$

Die Rechnungen verlaufen nun folgendermaßen: Ausgehend von einer beliebigen Anfangsverteilung von ω_φ (z.B. $\omega_\varphi = 0$) im Rechenbereich wird an allen Rändern die analytische Lösung (6.4) vorgegeben und das FDG-System (5.11) zeitlich entwickelt, bis sich Stationarität eingestellt hat. Bei den Rechnungen wird der Parametersatz $A=-B=C=-D=1$ benutzt. Die Abb. (6.6) stellt die Ergebnisse (relativen Fehler) im Fall eines äquidistanten Gitters dar.

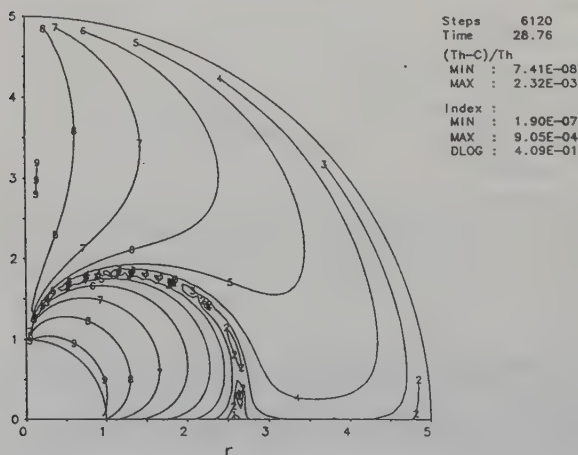
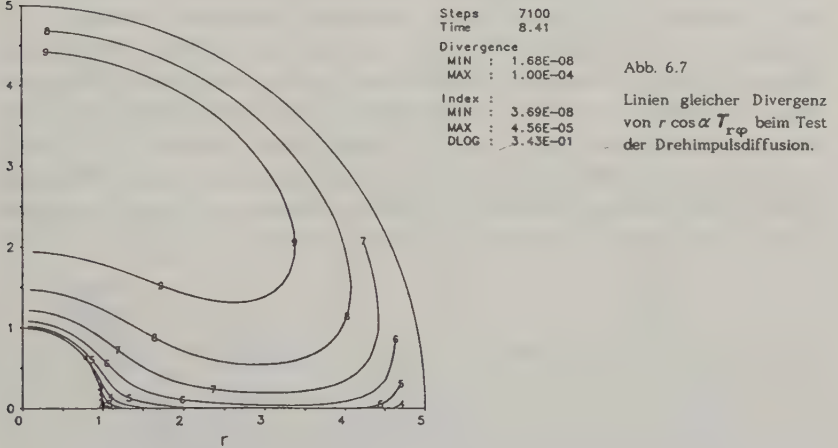


Abb. 6.6

Linien gleichen relativen Fehlers beim Test der Drehimpulsdiffusion.

Die Abweichungen von der theoretischen Lösung sind erneut dort am größten, wo die Gradienten am steilsten sind (am inneren Rand und in der Nähe der Rotationsachse) aber überall kleiner als 0.3%. Die Divergenz von $(r \cos \alpha \, T_{r\varphi})$, welche bei diesem Test gleich Null sein sollte, ist überall kleiner als 10^{-9} . Die Benutzung eines logarithmischen Gitters in beiden Richtungen führt zu ähnlichen Ergebnissen für die relativen Fehler, aber die Divergenz ist größer geworden (Abb. 6.7), speziell in Achsennähe, weil sich dort die Gitterauflösung trotz der steileren Gradienten verringert hat.



6.1.3 Radiative Terme

In diesem Abschnitt wird die Genauigkeit der *Flux-Limited Diffusion* (FLD) und der Diffusionsnäherung zur Lösung von Strahlungstransportproblemen untersucht. Die mit diesen Vereinfachungen erzielten Ergebnisse werden mit Rechnungen verglichen, die mit einem detaillierten Programm für ausgedehnte spärlich-symmetrische Sternatmosphären durchgeführt wurden. Die radiale Einteilung der Gitterzellen und die Dichteschichtung sind direkt von Sternatmosphärenmodellrechnungen von Gabler (1987, private Mitteilung) übernommen worden. Zwei unterschiedliche Sätze von Sternparametern wurden betrachtet, zunächst ein typischer O-Hauptreihenstern ($T_{\text{eff}} = 42000 \text{ K}$, $\log g = 3.5$, $M_{*} = 42.1 \, M_{\odot}$) und zweitens ein Zentralstern eines Planetarischen Nebels ($T_{\text{eff}} = 60000 \text{ K}$, $\log g = 4.6$, $M_{*} = 0.55 \, M_{\odot}$).

Die effektive Temperatur der Sterne liefert in beiden Fällen die innere Randbedingung für den Fluß

$$F_* = \sigma_B T_{\text{eff}}^4, \quad (6.5)$$

wobei σ_B die Stefan-Boltzmann-Konstante ist. Flußerhaltung ($r^2 F = \text{const.}$) bedeutet, daß die gesamte am inneren Rand einfließende Strahlungsenergie das System am äußeren Rand frei verlassen kann. Weil an diesem Rand die Bedingungen des Strömungslimits (Gl. 4.33) ausgezeichnet erfüllt sind, wird hier $F(r_{\text{max}}) = c E(r_{\text{max}})$ angenommen, womit dann die Randbedingung für die Strahlungsenergie berechnet werden kann²¹⁾. In Abb. (6.8) sind die berechneten *Eddington-Trajektorien* der zwei Sterne für das FLD-Modell und die 'exakte' Lösung aufgetragen. Die offenen Dreiecke (Δ) und die Quadrate ($\square$) gehören zur Lösung mit dem Sternatmosphärenprogramm und die Kreuze (+) zur FLD Näherung. Daß die FLD-Lösungen so gut mit den Trajektorien der Sternatmosphäre übereinstimmt, ist nicht überraschend, weil sie speziell eine Anpassung an diese darstellen. Dazu wurden zwei Parabeln in den Bereichen $0.0 \leq f_{\text{str}} \leq 0.4$, und $0.4 < f_{\text{str}} \leq 1.0$, die am Punkt $f_{\text{str}} = 0.4$ stetig differenzierbar sein sollten, angepaßt (vgl. Gl. 4.35). Diese Relation ist durch die durchgezogene Kurve im Diagramm gegeben und verläuft zwischen den Daten der zwei Sterne.

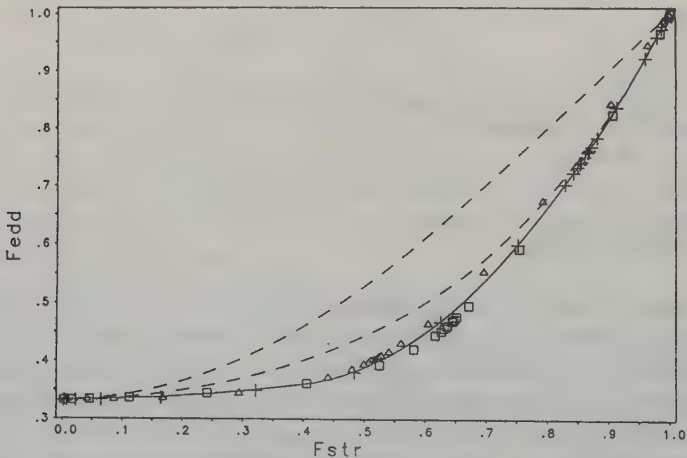


Abb. 6.8

Verschiedene *Eddington-Trajektorien*. Die gestrichelten Linien grenzen den Bereich von Fu (1987) ein. Die durchgezogene Linie ist durch die Gl. (4.35) gegeben und stellt eine Anpassung an die Sternatmosphärenmodelle ($\square, \Delta$) dar. Die Kreuze bezeichnen die FLD-Lösung und liegen natürlich auf der durchgezogenen Linie (vgl. Abb. 4.2, S. 47).

Es ist interessant, daß die Trajektorien dieser zwei doch recht unterschiedlichen

21) Zu den Randbedingungen siehe Abschnitt (6.3.1).

Sterne so gut übereinstimmen aber beide deutlich außerhalb des Bereichs liegen, der von Fu (1987) auf der Basis einer statistischen Theorie für die Intensität berechnet wurde (durch die zwei gestrichelten Linien angezeigt). Es stellt sich die Frage, inwieweit Abschätzungen von Flux-Limitern, die auf statistischen Annahmen wie Entropiemaximierung (Minerbo, 1978) oder der Chapman-Enskog-Methode beruhen, von allgemeinerer Bedeutung sind, wenn sie nicht mit genaueren Lösungen des Strahlungstransports übereinstimmen. Es muß aber betont werden, daß die hier gemachte

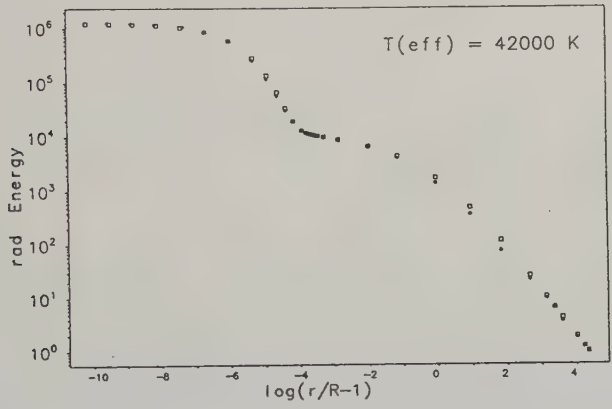


Abb. 6.9a

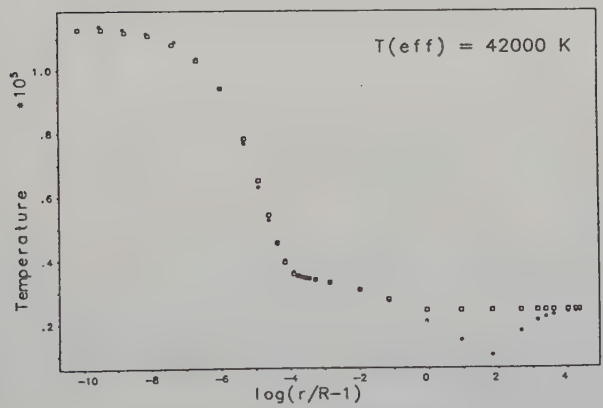


Abb. 6.9b

Abb. 6.9

Die radiale Abhängigkeit von E (a) und T (b) für den 42000 K Stern
 ($\square$ = 'exakte' Lösung, * = FLD-Lösung).

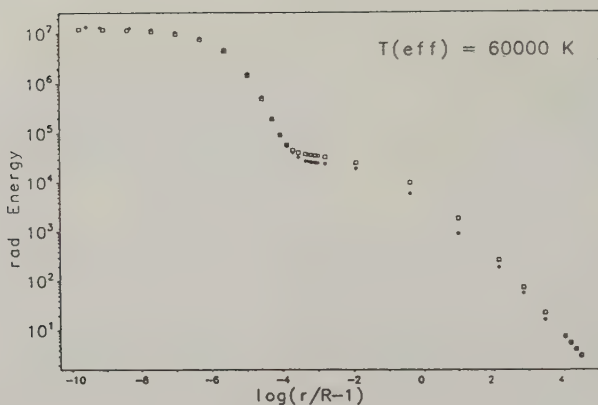


Abb. 6.10a

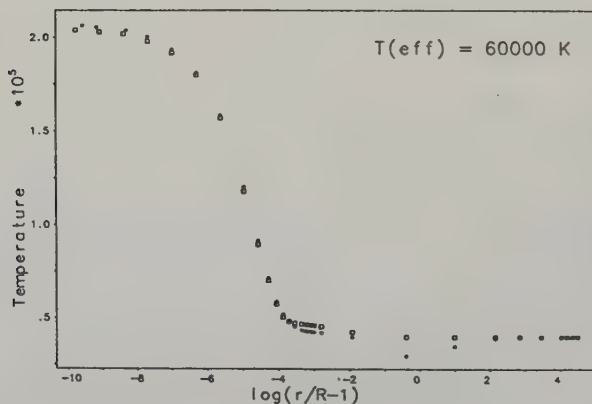


Abb. 6.10b

Abb. 6.10

Die radiale Abhängigkeit von E (a) und T (b) für den 60000 K Stern

($\square$ = 'exakte' Lösung, $*$ = FLD-Lösung).

Anpassung natürlich auch nicht irgendeinen allgemeingültigen Anspruch hat, sondern in gewisser Weise erzwungen wurde. Aber wie bereits erwähnt, sind alle Ansätze dieser Art grundsätzlich *ad hoc*.

Die radiale Abhängigkeit von E und T für den $T_{\text{eff}} = 42000$ K Stern ist in Abb. (6.9) dargestellt und in Abb. (6.10) die für den 60000 K Stern. Die Symbole haben die gleiche Bedeutung wie oben, d.h. Quadrate gehören zur exakten und Sternchen zur FLD-

Lösung. Die Temperaturabsenkung bei großen Radien ist ein Artefakt. Die Rechnungen werden mit den Daten des grauen Sternatmosphärenmodells als Anfangszustand begonnen (Quadrate in Abb. 6.9, 6.10), wobei die Temperaturen in den äußeren Teilen auf einen konstanten Wert, der in etwa mit der dortigen NLTE²²⁾-Temperatur korrespondiert, gesetzt wurden und im restlichen Bereich auf LTE-Werte (Gabler, 1987). Dies wird dann zeitlich iteriert, bis sich ein Gleichgewichtszustand eingestellt hat. Wegen der Annahme des thermischen Gleichgewichts (Gl. 4.47) beginnt die Temperatur zu den niedrigeren Gleichgewichtswerten in den äußeren Bereichen, in denen E proportional zu r^{-2} ist, abzusinken. In der Nähe des äußeren Randes ist nun die Dichte so gering, was eine sehr lange Kühlzeit zur Folge hat, so daß die Zeitentwicklung dort nicht bis zum Gleichgewichtszustand fortgesetzt werden kann. In den inneren Bereichen wird dieser dagegen sehr rasch erreicht. Somit haben einige Punkte begonnen auf ihre LTE-Werte zu fallen, während die äußeren immer noch in ihrem Anfangszustand sind. Die hier gemachte LTE-Annahme ist sicherlich nicht in optisch dünnen Bereichen gültig, aber es interessiert ja vor allem die optisch dicke Scheibe.

Neben diesem durch die langen Kühlzeiten verursachten Effekt ist die *quantitative* Übereinstimmung in diesem vereinfachten FLD-Fall recht gut. Die größten Abweichungen treten, wie man auch erwartet, in der Übergangszone von optisch dicken Bedingungen zu optisch dünnen auf. Die Temperatur in den inneren Bereichen ist leicht zu groß, was wahrscheinlich ein Ergebnis der etwas zu großen Opazität ist. Eine Modifikation der Quellfunktion und der Absorptionskoeffizienten, vor allem in optisch dünnen Regionen, wird die Übereinstimmung voraussichtlich noch weiter verbessern. Als Startpunkt für die Berechnung der Grenzschichtstruktur sind die bisherigen Ingredienzen jedoch sicherlich ausreichend.

22) NLTE bedeutet, daß kein lokales thermodynamisches Gleichgewicht (*Non Local Thermal Equilibrium*) gilt.

6.2 Vertikale Scheibenstruktur

Bei den Modellrechnungen (Kap. 7) wird als Anfangsbedingung neben einer Quasi-Atmosphäre des Weißen Zwergs eine stationäre Scheibe der Art, wie sie in Kap. (2.1) erläutert wurde, vorgegeben. Weil reale Scheiben eine vertikale Temperaturabhängigkeit besitzen, ist es nicht sinnvoll, für die anfängliche vertikale Schichtung der Scheibe Isothermie anzunehmen. Günstiger ist es, die Struktur konsistent unter Berücksichtigung der verwendeten Viskosität ($\nu = \text{const.}$) und Opazität (Gl. 4.48) zu berechnen. Die Berechnung der vertikalen Schichtung der Scheibenatmosphäre ist ein eindimensionales Problem. In Zylinderkoordinaten lautet das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{GM_* z}{R^3} \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon w)}{\partial z} &= - p \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{9}{4} \frac{GM_*}{R^3} \nu \rho - \Lambda \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(Ew)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c \lambda}{\rho(x+\sigma)} \frac{\partial E}{\partial z} \right) + \Lambda. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Dabei ist w die vertikale Geschwindigkeitskomponente und R der (fest vorgegebene) Abstand vom Zentralstern der Masse M_* , zu dem die vertikale Struktur berechnet werden soll. Für die Dissipationsfunktion wurde bereits der Wert

$$\Phi = \frac{9}{4} \nu \rho \frac{GM_*}{R^3} \quad (6.7)$$

eingesetzt, der sich für Kepler-Rotation ergibt, wenn bis auf $T_{r\varphi}$ alle Komponenten des viskosen Spannungstensors verschwinden.

Am unteren Rand (Äquatorebene, $z=0$) werden Symmetriebedingungen ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$) für Dichte und Temperatur angewandt, und für Strahlungsfluß und Geschwindigkeit gilt $F=w=0$. Am oberen Rand soll die dissipierte Energie frei abgestrahlt werden können, womit die Randbedingung für den Fluß $\frac{\partial F}{\partial z}(z=z_{\max})=0$ lautet, und $z_{\max}$ die obere Grenze des Rechenbereichs darstellt. Diese Bedingung gilt nur dann, wenn bei $z_{\max}$ die Atmosphäre bereits optisch dünn ist, und das *Streaming Limit* ($F=cE$) gilt.

Zu Beginn der Rechnungen wird für einem bestimmten Massenfluß $\dot{M}$ gemäß (Gl. 2.4) die vertikale Scheibendichte Σ bestimmt und gleichmäßig bis zur maximalen Höhe $z_{\max}$ verteilt. Also lautet die Anfangsbedingung für die Dichte

$$\rho_1 = \text{const.} = \frac{\Sigma}{2 N z_{\max}},$$

wobei NZ die Anzahl der Gitterzellen ($NZ = 60$) ist. Die Temperatur und die Strahlungsenergie können beliebig (z.B. ebenfalls konstant) initialisiert werden, sie stellen sich dann automatisch auf den richtigen Gleichgewichtswert ein. Die Geschwindigkeit wird anfangs gleich Null gesetzt.

Von dieser Anfangskonfiguration ausgehend wird das Modell zeitlich entwickelt, bis sich ein Gleichgewichtszustand eingestellt hat, d.h. bis die Geschwindigkeiten vernachlässigbar werden.

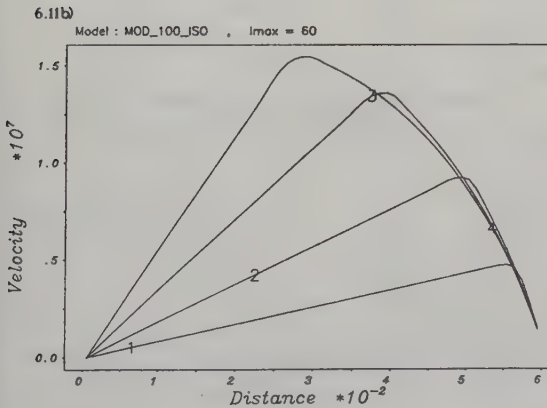
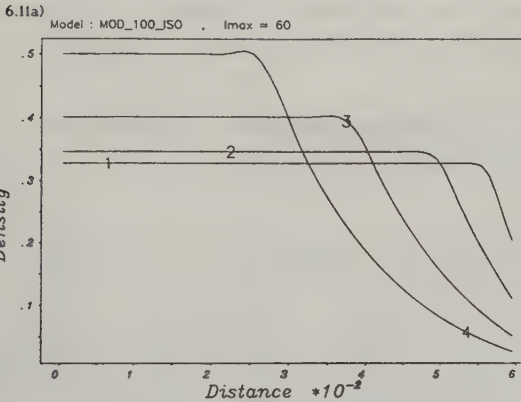


Abb. 6.11

Dichte und Geschwindigkeitsverlauf beim isothermen Scheibenmodell. Die Dichte (6.11a) nimmt innen gleichmäßig mit $\rho = \text{const.}$ zu (Labels in aufsteigender zeitlicher Reihenfolge), und der Betrag der Geschwindigkeit (6.11b) steigt linear an.

Als Testproblem wurde zunächst der einfachere isotherme Fall gerechnet, in dem die Energiegleichungen wegfallen. Weil die Gleichungen (6.6) dieselbe Struktur haben wie beim radialsymmetrischen Kollaps (s. KH), sollte in diesem Fall ebenso die Dichte überall gleichmäßig zunehmen (also mit $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$), und die Geschwindigkeit linear ansteigen. Die Rechnungen bestätigen dies auch ausgezeichnet (Abb. 6.11). Damit es im äußeren Bereich, in dem die Dichte steil abfällt, nicht zu Instabilitäten kommt, wird generell eine leichte Dämpfung (Viskosität) mitberücksichtigt. Dazu werden einfach die üblichen Terme benutzt, die allerdings im Gleichungssystem (6.6) nicht explizit angegeben sind. Im Gleichgewichtszustand folgt die Dichte der theoretischen Gauß-Verteilung. In Abb. (6.12) bedeutet die durchgezogene Linie die berechnete numerische Lösung, und die gestrichelte gibt den theoretischen Verlauf an.

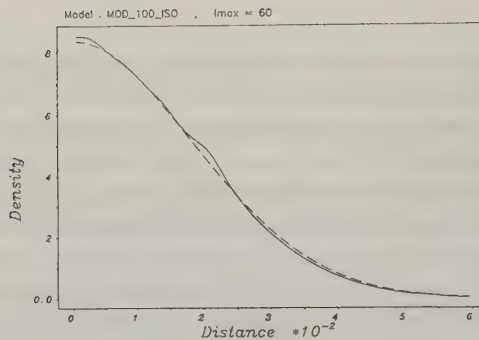


Abb. 6.12

Quasistationärer Dichteverlauf (durchgezogene Kurve) bei isothermer Scheibenstruktur. Die Dichte schwankt noch leicht um ihren Gleichgewichtswert (gestrichelte Gauß-Kurve).

Nicht-isotherme Rechnungen mit vollständigem Energietransport führen zu der in Abb. (6.13) dargestellten vertikalen Struktur.

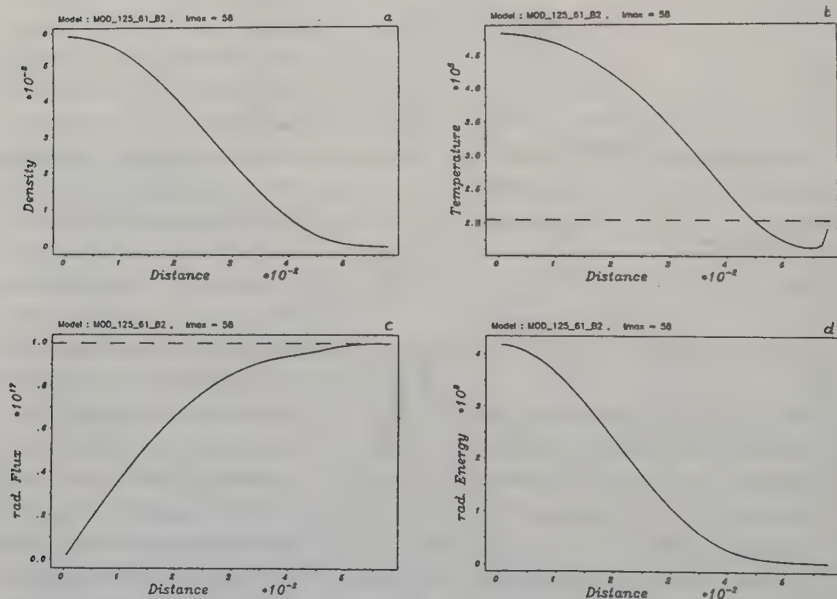


Abb. 6.13

Die vertikale Schichtung einer Akkretionsscheibe mit den Parametern $M_{WD} = 1 M_{\odot}$, $\dot{M} = 3 \cdot 10^{-8} M_{\odot}/\text{yr}$, und $v = 10^{15} \text{ cm}^2/\text{s}$ bei $r = 1.25 R_{WD}$. Die gestrichelte Linie in Abb. (6.13c) bezeichnet den theoretischen Fluß nach Gl. (6.8) und in Abb. (6.13b) die zugehörige Effektivtemperatur. Alle Einheiten sind im cgs-System angegeben.

Der von der Scheibe emittierte Fluß stimmt dabei bis auf wenige Prozent mit dem theoretischen Wert

$$F_D = \frac{3}{8\pi} \frac{GM_* \dot{M}}{R^3} \quad (6.8)$$

(vgl. Gl. 2.6) überein (gestrichelte waagerechte Linie in Abb. 6.13c). Der Verlauf von Dichte und Temperatur (Abb. 6.13a, b) stimmt qualitativ gut mit den Modellen der vertikalen Scheibenstruktur von Meyer & Meyer-Hofmeister überein, wobei die Abweichungen durch die unterschiedliche Opazität und Viskosität verursacht werden. In

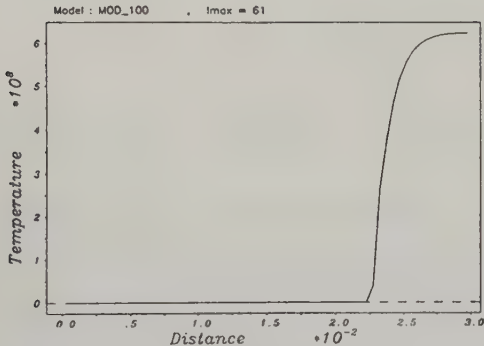


Abb. 6.14

Vertikaler Temperaturverlauf in einer Akkretionsscheibe einschließlich einer darüberliegenden heißen Korona. Zur Erläuterung siehe nebenstehenden Text.

den äußeren Schichten der Scheibe steigt die Temperatur steil an (Abb. 6.14), weil dort die dissipierte Energie wegen der langen Kühlzeiten nicht rasch genug abgestrahlt werden kann. Der dissipative Teil liefert nämlich wegen $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_{\text{Diss}} = \frac{9}{4} \frac{GM_* \dot{M}}{R^3} \nu$ immer einen konstanten Zuwachs zur inneren Energie (bzw. Temperatur), unabhängig von der lokalen Dichte. Modelle dieser Art werden dann in Kap. 7 zum Initialisieren der zweidimensionalen (2-D) Rechnungen benutzt.

6.3 Gittergröße und Randbedingungen

Wie in Abschnitt (5.2) erläutert, umfaßt der Rechenbereich eine sphärische Schale mit $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ und $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$, die in $N_r \times N_\alpha$ Gitterzellen aufgeteilt ist (Abb. 6.15). Um den Übergang zwischen den sehr dichten Schichten der unteren Atmosphäre des WD und den transparenten äußeren Teilen einigermaßen korrekt zu beschreiben, wird als minimaler Radius $r_{\min}$ in Analogie zu Sternatmosphärenmodellrechnungen ein Wert gewählt, der etwas kleiner als der Photosphärenradius r_{ph} des WD ist. Dieses $r_{\min}$ wird im folgenden auch kurz als R_* (Sternradius) bezeichnet. Der Absolutwert von R_* kann erst aus Sternentwicklungsrechnungen (den ganzen Stern umfassend) bestimmt werden. Für Weiße Zwerge gilt in guter Näherung die Masse-Radius-Beziehung (Nauenberg, 1972)

$$R_{WD} = 1.12 \cdot 10^{-2} * R_\odot * \sqrt{\left(\frac{M_{WD}}{M_{Ch}}\right)^{-2/3} - \left(\frac{M_{WD}}{M_{Ch}}\right)^{2/3}}, \quad (6.9)$$

wobei M_{Ch} die Chandrasekharsche Grenzmasse für Weiße Zwerge bezeichnet, $M_{Ch} = 1.44 M_\odot$. Um den erläuterten Übergang zu gewährleisten, wird in dieser Arbeit

$$R_* = r_{Norm} * R_{WD} \quad (6.10)$$

gesetzt, wobei r_{Norm} minimal kleiner als eins gewählt wird, typischerweise $r_{Norm} = 0.999$, um den vorher nicht bekannten $\tau=1$ -Punkt miteinzuschließen (vgl. Gl. 7.7). Der äußere Rand liegt bei $r_{\max} = 1.25 R_*$ bzw. $1.50 R_*$. In dimensionslosen Variablen (s. Abschnitt 5.1.2) gilt also

$$r_1^a = r_{\min} = 1.0, \quad r_{Nr+1}^a = r_{\max} = 1.25 \quad (\text{bzw. } 1.50)$$

(s. Gl. 5.1c). In allen Rechnungen ist $\alpha_{\min}$ identisch mit der Äquatorebene, d.h. $\alpha_{\min} = 0$, wie es die physikalische Situation nahelegt. Um Probleme mit den Randbedingungen bei $\alpha_{\max}$ zu vermeiden, wird der Rechenbereich bis zum Pol ausgedehnt. Aufgrund von Symmetriebedingungen sind die Randbedingungen dort wohldefiniert. Zusammenfassend gilt

$$\alpha_1^a = \alpha_{\min} = 0.0, \quad \alpha_{Nr+1}^a = \alpha_{\max} = \frac{\pi}{2}.$$

Der Rechenbereich ist in Abb. (6.15a) veranschaulicht.

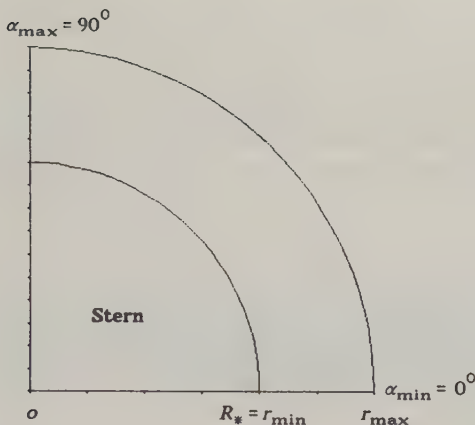


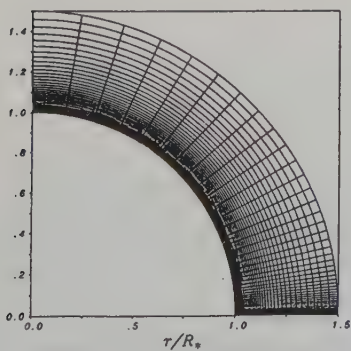
Abb. 6.15a

Skizze des Rechenbereichs der zweidimensionalen Grenzschichtrechnungen.

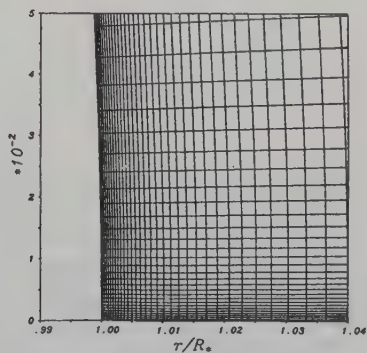
Die Gitterzellenzahl in den Modellrechnungen beträgt

$$N_r = 61 \text{ und } N_\alpha = 61,$$

so daß der Bereich von Abb. (6.15a) mit $N_r \times N_\alpha = 3721$ Gitterzellen überdeckt wird. Um die Auflösung im Bereich der Grenzschicht (und Scheibe) zu erhöhen, ist die Ausdehnung der Gitterzellen bei kleinen r und kleinen α reduziert worden (Abb. 6.15b, 6.15c). Da somit in den äußeren Bereichen teilweise die Gitterzellenfläche aus sehr langgestreckten Rechtecken besteht, ist die Rechengenauigkeit (am höchsten bei quadratischen Zellen) dort herabgesetzt.



b)



c)

Abb. 6.15 b, c

Die Überdeckung des Rechenbereichs mit einem 61×61 -Gitternetz.

b) Gesamter Rechenbereich c) Ausschnitt.

Bei den endgültigen Modellen in Kap. (7.2) wird als Anfangsbedingung eine konsistente graue Atmosphärenstruktur vorgegeben²³⁾, also nicht einfach eine isotherme Atmosphäre mit hoher Temperatur und der daraus resultierenden Dichteschichtung (s. Kley, 1985). Ein Problem dabei ist natürlich der enorm steile exponentielle Dichteabfall auf Längen der Druckskalenhöhe bei Weißen Zwergen ($\approx 10^{-5} R_{WD}$, für $M_{WD} = 1.0 M_{\odot}$, $T = 15000 \text{ K}$), so daß leichte Modifikationen gemacht werden müssen (s. S. 97).

6.3.1 Randbedingungen

Am einfachsten sind die Randbedingungen für die Polachse und die Äquatorebene zu formulieren wegen der dort geltenden Symmetrieebedingungen.

- Äquatorebene ($\alpha_1 = 0$, $r_1 \leq r \leq r_{N+1}$)

Hier gilt Spiegelsymmetrie, so daß für alle physikalischen Größen x , die in der Mitte einer Gitterzelle definiert sind, also $x \in (\rho, \varepsilon, E, h)$, $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0$ gilt. Mit guter Genauigkeit kann hier

$$x_{i,0} = x_{i,1}$$

gesetzt werden, wobei sich der Index $j=0$ auf die erste Hilfsgitterzelle außerhalb des eigentlichen Rechenbereichs ($\alpha_0^b < 0$) bezieht. In der Äquatorebene gilt für die meridionalen Komponenten der Geschwindigkeits- und Flußvektoren $u_{\alpha} = F_{\alpha} = 0$, und die Randbedingungen lauten

$$g_{i,1} = F_{i,1}^{\alpha} = 0.$$

Bei der Advektion durch monotonen Transport (KH) werden die Gradienten der Geschwindigkeit u_{α} in der Äquatorebene benötigt. Hier kann dann formal

$$g_{i,0} = -g_{i,2} \frac{\frac{\alpha_1^a - \alpha_0^a}{\alpha_2^a - \alpha_1^a}}{\alpha_2^a - \alpha_1^a} \approx -g_{i,2}$$

geschrieben werden, und die Randbedingungen werden automatisch korrekt mitberücksichtigt. Die radialen Komponenten u_r und F_r werden analog zur Dichte etc. behandelt, d.h. die Ableitung verschwindet.

23) Dazu wurde eine eindimensionale radialsymmetrische Version des Programms benutzt.

- **Rotationsachse** ($\alpha_{N\alpha+1} = \frac{\pi}{2}$, $r_i \leq r \leq r_{N\alpha+1}$)

Hier gilt Symmetrie bezüglich Punktspiegelungen an der Rotationsachse. Die Randbedingungen sind also analog zu denen in der Äquatorebene und werden entsprechend behandelt.

- **Sternrand** ($r_1 = 1$, $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_{N\alpha+1}$)

Der Sternrand wird als sog. *no-slip* Randbedingung²⁴⁾ behandelt, d.h. die poloidale Geschwindigkeitskomponente verschwindet an der Oberfläche ($u_r = u_\alpha = 0$ für $r = r_{\min}$) und die azimuthale Winkelgeschwindigkeit nimmt den Wert der Sternrotation an ($\omega(r_{\min}) = \omega_*$). Für die Radialkomponente gilt also

$$v_{1,j} = 0 \quad \text{und} \quad v_{0,j} = -v_{2,j} * \frac{r_1^a - r_0^a}{r_2^a - r_1^a}.$$

Die Werte von g und ω an den Hilfsgitterpunkten können wieder durch lineare Extrapolation unter Berücksichtigung obiger Bedingungen gewonnen werden

$$g_{0,j} = -g_{1,j} * \frac{r_1^a - r_0^a}{r_2^a - r_1^a}$$

$$h_{0,j} = (\omega_*(r_2^a - r_0^a) - h_{1,j} * (r_1^a - r_0^a)) / (r_2^a - r_1^a).$$

Die Werte von (ρ, T, E) an den Hilfsgitterpunkten (r_0^b, α_j^b) werden im wesentlichen wieder nur bei den Advektionstermen benötigt. Aus der Überlegung, daß am inneren Rand die radiale Impulsgleichung identisch erfüllt sein muß, folgt (bei Vernachlässigung der Viskositätsterme) in dimensionslosen Einheiten

$$\left. \frac{\partial(\rho T)}{\partial r} \right|_{r=r_{\min}} = \frac{1}{r_{\min}^2}. \quad (6.11)$$

Falls der innere Rand weit genug innerhalb der Atmosphäre liegt, kann für den radialen Fluß durch $r_{\min} = R_*$ der feste Wert

$$F^r(r=r_{\min}) := F_* = \sigma T_{\text{eff}}^4$$

benutzt werden. Die effektive Temperatur des Weißen Zwerger T_{eff} ist ein Eingabeparameter. Bei Annahme von thermischem Gleichgewicht gilt

24) Dies ist eine typische Randbedingung bei viskosen Strömungen. Dabei verschwinden an einer festen Grenzfläche jeweils die tangentielle und normale Geschwindigkeitskomponente relativ zur Oberfläche.

$$F_* = - \frac{4 c a}{3 \rho (\chi + \sigma)} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_{\min}} \quad (6.12)$$

Aus Gl. (6.11) und (6.12) können die Werte von ρ und T an den Hilfsgitterpunkten im Prinzip konsistent berechnet werden. Wegen der Abhängigkeit $\chi = \chi(\rho, T)$ muß dies iterativ erfolgen. Weil die Geschwindigkeiten in der Nähe der Sternoberfläche sehr klein sein werden, sind die genauen Werte von untergeordneter Bedeutung, und es wird hier als **Vereinfachung** die Annahme eines **verschwindenden Gradienten** gemacht, also gilt $\rho_{0,j} = \rho_{1,j}$ usw. Als Randbedingung für den radialen Strahlungsfluß (benötigt in der Diffusionsnäherung) wird wie erwähnt $F_{1,j}^r = F_*$ gewählt. Eine zusätzliche Randbedingung für die meridionale Komponente wird nicht benötigt.

- **Außenrand** ($r = r_{\max}, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_{N\alpha}$)

Dies ist der problematischste Teil, weil hier weder ein fester Rand noch Symmetriebedingungen vorliegen, und zur exakten Formulierung der Randbedingungen eigentlich schon die Lösung bekannt sein müßte. Es gilt, eine Beschreibung zu finden, die im inneren Bereich die Rechnungen möglichst wenig beeinflusst.

Der Randbereich von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird in zwei Teile unterteilt mit unterschiedlichen Randbedingungen, die kurz erläutert werden.

- **Scheibenbereich** ($r = r_{\max}, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_{\text{Disc}}$)

Der Winkel α_{Disc} bezeichnet die vertikale Ausdehnung der Scheibe und wird entweder mit Hilfe von vertikalen Scheibenmodellen nach Kap. (6.2) konsistent berechnet, oder es werden Abschätzungen von Meyer & Meyer-Hofmeister (1981) übernommen.

In diesem Scheibenbereich wird Kepler-Rotation angenommen und eine vertikale Schichtung der Scheibe fest vorgegeben. Der radiale Strahlungsfluß verschwindet, und F_α wird konsistent berechnet und ebenfalls fest vorgegeben. Die vertikale Geschwindigkeitskomponente wird unter der Annahme von hydrostatischem Gleichgewicht in vertikaler Richtung gleich Null gesetzt. Die radiale Komponente hängt von der jeweiligen Behandlung des Masseneinstroms $\dot{M}_{\text{in}}$ ab. Bei **variablem** $\dot{M}_{\text{in}}$ wird $\frac{\partial v}{\partial r} = 0$ gesetzt, wobei die Geschwindigkeit immer negativ (nach innen gerichtet) ist aber einen Maximalwert nicht überschreiten kann. $\dot{M}_{\text{in}}$ stellt sich also entsprechend der dynamischen Entwicklung ein. Diese Randbedingung ist bereits in Kley (1985) entwickelt worden und wurde bei der in Abschn. (6.4) erläuterten Rechnung ohne Strahlungstransport verwendet. Als zweite Möglichkeit wird ein bestimmtes **festes** $\dot{M}_{\text{in}}$ vorgegeben, was bei gegebener vertikaler

Struktur (bei $r_{\max}$) eine feste radiale Einfallgeschwindigkeit impliziert, die zur Vereinfachung keine vertikale Abhängigkeit besitzt. Nach Gl. (2.5) gilt

$$v_{Nr+1,j} = -\frac{3}{2} \frac{v}{r_{Nr+1}^a} \quad (\text{für } 1 \leq j \leq N_{\text{Disc}}) \quad (6.13)$$

- Bereich **oberhalb der Scheibe** ($r = r_{\max}$, $\alpha_{\text{Disc}} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$)

Hier ist kein weiterer Einstrom von Materie möglich, und es werden die üblichen *Outflow*-Randbedingungen, d.h. verschwindende Gradienten von ρ , T , usw., verwendet. Zur Vermeidung von künstlichen Drehmomenten (Spannungen) an diesem Rand wird auch $\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$ gesetzt. Für die Randbedingung der Strahlungsenergie wird angenommen, daß sich diese geometrisch verdünnt, weil die Dichten oberhalb Scheibe sehr gering sind, und das Gas als optisch dünn betrachtet werden kann. Mit den Gln. (4.33, 4.34) folgt die Randbedingung für E dann zu

$$E_{Nr+1,j} = \left(\frac{r_{Nr}^a}{r_{Nr+1}^b} \right)^2 * F_{Nr,j}^r / (c \lambda R) \Big|_{r=r_{Nr+1}} \quad (6.14)$$

In Gl. (6.14) bezeichnet R wie in Kap. (4.2) den dimensionslosen Gradienten der Strahlungsenergie. Für den Strahlungsfluß gilt die analoge Überlegung, und die Randbedingung lautet

$$F_{Nr+1,j}^r = F_{Nr,j}^r * \frac{(r_{Nr}^a)^2}{(r_{Nr+1}^a)^2} \quad (6.15)$$

6.4 Modelle ohne Strahlungstransport

Um zu untersuchen, ob numerische Effekte beim Übergang von einer expliziten zur impliziten Behandlung der Viskositätsterme ein Rolle spielen, wurden zunächst Modelle ohne Strahlungstransport gerechnet.

Gleichzeitig wurde die Anfangsbedingung einer mit 10^8 K unrealistisch heißen Quasi-Atmosphäre aufgegeben und die Temperatur auf 10^5 – 10^6 K gesenkt. Dies ist u.a. durch eine Modifikation der äußeren Randbedingung ermöglicht worden. Diese wurde dahingehend abgeändert, daß die Dichte (und eventuell auch Temperatur) des einströmenden Scheibenmaterials kontinuierlich langsam bis auf den stationären Sollwert (siehe KH) erhöht (erniedrigt) wird (bezogen auf die Werte der Quasi-Atmosphäre). Hierdurch ist eine wesentlich stabilere Ausgangssituation entstanden. Die starken

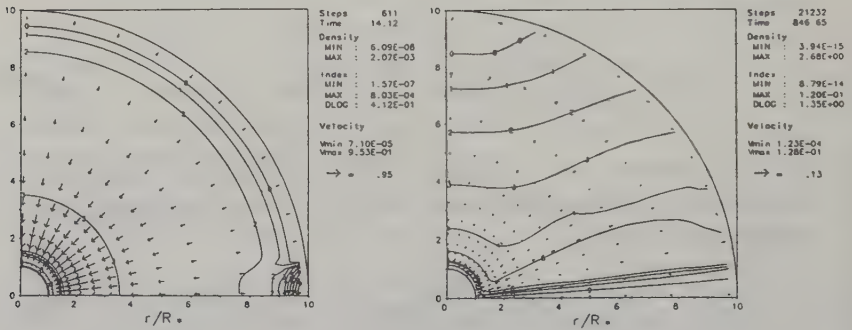


Abb. 6.16²⁵⁾

Dichtekonturen und Geschwindigkeitspfeile eines Modells ohne Strahlungstransport kurz nach Rechenbeginn (a) und in einem quasistationären Endzustand (b) (s. Text). Die Werte in der Bildlegende sind in den dimensionslosen Einheiten (Abschnitt 5.1.2) angegeben (s. auch die Fußnote).

²⁵⁾ in dieser und den folgenden Abbildungen ist dabei immer ein Schnitt in der meridionalen Ebene gezeigt (Achssymmetrie ist impliziert). Manchmal ist der gesamte Rechenbereich (hier zunächst bis $R_{\text{max}} = 10$) dargestellt oder auch nur Ausschnitte davon. Angegeben ist ferner die Anzahl der bis dahin benötigten Zeitschritte (Steps) und die physikalische Zeit (in Einheiten der Kepler-Periode an der Sternoberfläche geteilt durch 2π , vgl. Abschnitt 5.1.2). Die Abbildungen zeigen jeweils die Höhenlinien (Linien gleicher Werte) der angegebenen physikalischen Größe, deren Extremwerte (Maximum, Minimum) im gesamten Rechenbereich durch MIN, MAX (i.a. in *cgs* Einheiten) gegeben sind. Die Höhenlinien variieren dagegen im unter INDEX angegebenen Bereich (auch *cgs*), wobei die Nummerierung der Linien in dem Plot selbst (meist von 0 bis 10) in aufsteigender Reihenfolge erfolgt, und die Abstände durch DLIN, DLOG bei linearer bzw. logarithmischer Skalierung bestimmt sind. Darunter sind gegebenenfalls die Daten der überlagerten Geschwindigkeits- (Strahlungsfluß-) pfeile angegeben, ebenso mit der Unterscheidung von linear bzw. logarithmisch variierenden Längen. Weitere Einzelheiten bzw. Abweichungen sind bei Bedarf im Text zu den Abbildungen beschrieben.

Unregelmäßigkeiten, z.B. im Massenstrom und bei Wirbelbildungen mit teilweiseem Rückstrom von Materie, die vorher oft zu numerischen Instabilitäten führten, sind nun glatter und erlauben einen kontinuierlichen stabilen Einstrom von Materie. In Abb. (6.16) ist exemplarisch das Ergebnis einer solchen Rechnung dargestellt.

Wegen der Temperaturerniedrigung fällt die Materie infolge mangelnden hydrostatischen Gleichgewichts mit zunehmender Geschwindigkeit auf das Zentralobjekt zu (radialer Kollaps) bei gleichzeitiger Einströmung von Gas durch die Scheibe (s. Abb. 6.16a). Trotz dieser total unterschiedlichen Anfangsbedingung und zunächst anderer Entwicklung erreicht ein solches Modell genau den gleichen Endzustand wie die bisherigen; das ist ein nochmaliger Hinweis auf die korrekte Behandlung der Reibungsterme.

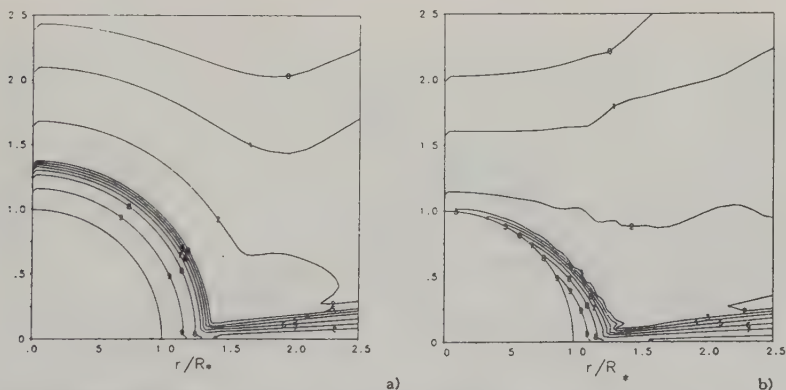


Abb. 6.17 Dichtekonturen

Vergrößerung des inneren Bereichs bei Rechnungen ohne Strahlungstransport. Bei nicht-rotierendem Stern (a) lagert sich die Materie zwiebelschalenförmig um den Stern an, und bei Sternrotation (b) findet eine Abplattung an den Polen und eine Konzentration zum Äquator hin statt (siehe auch KH).

Zu betonen ist also hierbei die relative Unabhängigkeit des Endzustandes von den Anfangsbedingungen, eine zumindest notwendige Bedingung für korrekte numerische Rechnungen mit wohldefiniertem eindeutigen stationären Endzustand, und die erreichte "Robustheit" der numerischen Methode.

Die wesentlichen Merkmale solcher Modelle mit instantaner Abstrahlung der dissipierten Energie ($f_\phi = 0$, siehe KH) seien nochmals kurz zusammengefaßt.

a) Scheibenstruktur

- dünn und leicht konkav
- mit hoher Genauigkeit keplersch rotierend

b) In der Nähe des WZ (mögl. BL)

- Materie wandert **bis zum Pol** und lagert sich zwiebel-schalenförmig um den Weißen Zwerg an mit einer Dicke von etwa $0.3 R_*$.
- Die azimuthale Geschwindigkeit u_φ fällt innerhalb dieses Bereichs auf Sternrotation ab
- Eine Rotationsgeschwindigkeit des Sterns von über ca. 50% des entsprechenden keplerschen Werts an dessen Oberfläche führt zu einer elliptischen Form der Grenzschicht (vgl. Abb. 6.17 b).

Modellrechnungen mit $f_\phi = 1$ führten zu einer sehr dicken Scheibe mit $u_\varphi < u_k$ ohne ausgeprägte Grenzschicht (vgl. Abb. 11 in KH). In CVs ist aber auch $f_\phi \approx 0$ wegen der kurzen radiativen Zeitskalen im Vergleich zu den viskosen, d.h. es kann hier eine sofortige Abstrahlung der dissipierten Energie angenommen werden.

Der wesentliche Mangel dieser Rechnungen ist eine falsche Temperaturschichtung in Scheibe und Grenzschicht, weil keinerlei Kühlmechanismen berücksichtigt wurden, und sich die Materie adiabatisch um den Stern anlagern konnte. Auch fehlt natürlich jeglicher Energietransport durch Strahlung.

6.5 Rechnungen unter Einschluß von Strahlungstransport

Um den Effekt dieser Mechanismen auf die BL-Struktur zu studieren, wurde eines der obigen Modelle als Anfangszustand benutzt, und die Rechnungen unter Einschluß von Strahlungstransport weitergeführt. Der Ausgangszustand ist dabei ein solcher, bei dem sich die Materie bereits sphärisch um den Zentralstern angelagert hat mit einer radialen Ausdehnung von etwa 0.3 Sternradien (s. Abb. 6.17a). In diesem quasi-stationären Zustand sind die Geschwindigkeiten sehr klein. Nur in der Scheibenebene wird schnell Materie nachgeliefert (Abb. 6.18a). Werden nun zusätzlich Strahlungstransport und Kühlung eingeschaltet, so beginnt die Materie sofort mit hoher

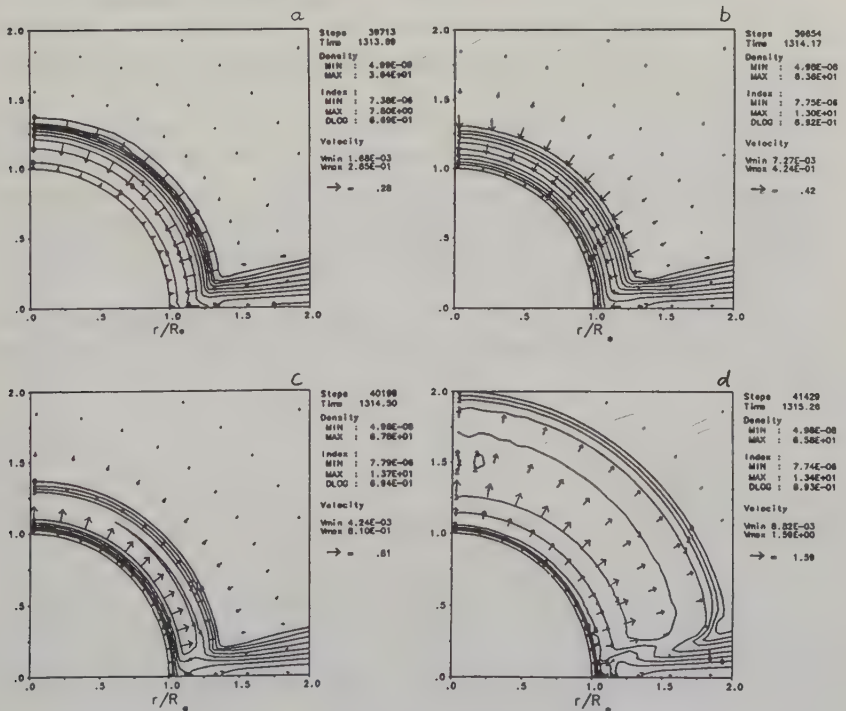


Abb. 6.18

Die zeitliche Entwicklung eines Modells, das mit Strahlungstransport fortgesetzt wurde, nach dem Einschalten der Strahlungsterme (ausführliche Diskussion im Text).

Geschwindigkeit radial nach innen zu fallen (Abb. 6.18b), weil durch Kühlung die Temperatur stark erniedrigt und das vorher bestehende Druckgleichgewicht aufgehoben wird. Die dichte Schale um den Weißen Zwerg kollabiert (Abb. 6.18c) auf einer Zeitskala, die wesentlich kürzer als die bisherige Evolutionszeit ist. Die starke Komprimierung der Materie führt zu erneuter Aufheizung und Reexpansion zumindest eines Teils der Materie (Abb. 6.18c). Zurück bleibt schließlich eine geometrisch dünne Schicht mit hoher Dichte direkt an der Sternoberfläche mit einer ausgedehnten äußeren Schale sehr geringer Dichte (Abb. 6.18d). Dies stellt allerdings noch keinen stationären Endzustand dar, wegen der immer noch sehr großen Geschwindigkeiten. Die Zeitschrittgröße Δt hat sich aber aufgrund numerischer Instabilitäten derart verkleinert, daß die Verfolgung der weiteren Entwicklung nicht möglich war. In Abb. (6.18) sind die Geschwindigkeitspfeile an jedem dritten Gitterpunkt in radialer Richtung dargestellt, woraus man erkennt, daß die Schale auf 1-2 Gitterzellen zusammengeschrumpft ist. Die Auflösung des Gitters ist also in diesem Bereich nicht mehr ausreichend.

Diese fortgesetzten Rechnungen unter Einschluß von Strahlungstransport geben zwar einen Hinweis auf die zu erwartende reale Ausdehnung der Grenzschicht, lassen aber keinerlei Schlüsse darauf zu, ob sich die Materie weiterhin bis zu den Polen des akkretierenden Sterns ausbreitet, oder doch in der Nähe des Äquators bleibt. Die Anfangsbedingungen in diesen Modellen beinhaltete schon eine sphärischen Struktur.

Zur Untersuchung dieser Fragen sind also vollständig *neue* Entwicklungsrechnungen mit einer wesentlich besseren räumlichen Auflösung des inneren Bereichs notwendig.

7 Ergebnisse

7.1 Vorbereitende Rechnungen bis $r_{\max} = 1.25 R_*$

Weil die Rechnungen, die mit Strahlungstransport fortgesetzt wurden (Kap. 6.5), eine extrem dünne Grenzschicht erwarten lassen, ist zunächst der Rechenbereich bis auf $r_{\max} = 1.25 R_*$ begrenzt worden. Dabei wurden dann im wesentlichen zwei Fälle unterschieden. Erstens Modelle mit variierendem Masseneinstrom und zweitens solche, bei denen er auf einen festen Wert gesetzt wurde.

7.1.1 Variabler Masseneinstrom

Ausgehend von den Rechnungen ohne Strahlungstransport (Abschn. 6.4, KH) wird hier, in der im Abschnitt (6.3) beschriebenen Art und Weise, der Masseneinstrom variabel gehalten. Der anfängliche Einstrom erfolgte in eine heiße Quasi-Atmosphäre und eine Scheibe wurde nicht vorbelegt. Wie sich schon in den Modellen ohne Energietransport gezeigt hat, schnellte der Masseneinstrom zu Beginn der Rechnungen hoch, um dann im weiteren Verlauf kontinuierlich abzufallen (Abb. 7.1a). Der Ausstrom aus dem Rechenbereich ist um mindestens zwei Größenordnungen kleiner (Abb. 7.1b).

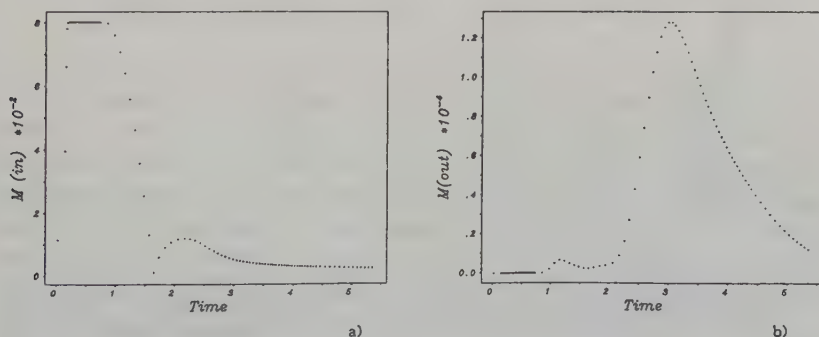


Abb. 7.1 Zeitliche Variation des Massenein- (a) und Ausstroms (b), in Einheiten von $1.13 \cdot 10^{21} \text{ g/s}$.

Im weiteren Verlauf bildet sich temporär eine Scheibenstruktur (Abb. 7.2), aber infolge des abnehmenden Einstroms bei gleichzeitigem hohen Durchstrom durch die Scheibe leert sich der mittlere Bereich. An Stern- und Außenrand bilden sich Gebiete erhöhter Dichte aus (Abb. 7.3). Trotz dieser Auflösung der Scheibenstruktur läßt sich die Tendenz erkennen, daß die Materie in der Nähe des Weißen Zwerges **nicht** zu den

Polen wandert sondern in der Äquatorregion verbleibt. Diesen Rechnungen haftet lei-

der der Mangel an, daß fälschlicherweise im Scheibenbereich am äußeren Rand als Randbedingung $\frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} = 0$ (wie oberhalb der Scheibe s.o.) und nicht $\omega_\varphi = \omega_K$ verwendet wurde. Dadurch hat sich ω_φ am Rand auf den hohen unphysikalischen Wert von $1.2 \omega_K$ eingestellt (Abb. 7.4)²⁶⁾. Diese Tatsache und das zu hohe schnell variierende $\dot{M}_{in}$ lassen keine weitergehenden Schlüsse zu und machen verbesserte Modelle notwendig.

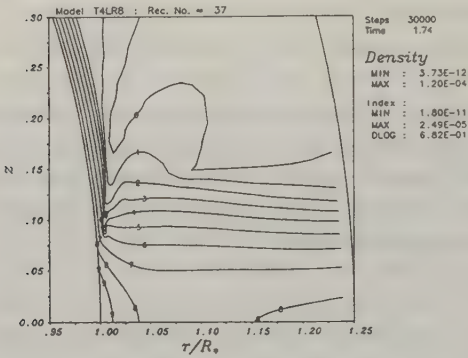


Abb. 7.2 Dichtekonturen eines Modells mit variablem $\dot{M}_{in}$ bei einer Zwischenzeit ($t=1.74$).

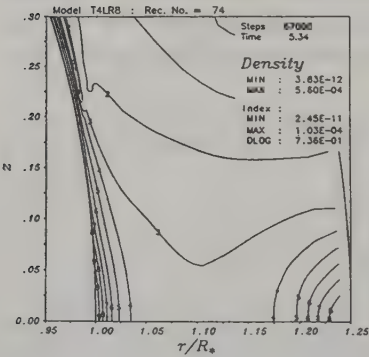


Abb. 7.3 Dichtekonturen eines Modells mit variablem $\dot{M}_{in}$ zu einem späteren Zeitpunkt ($t=5.34$).

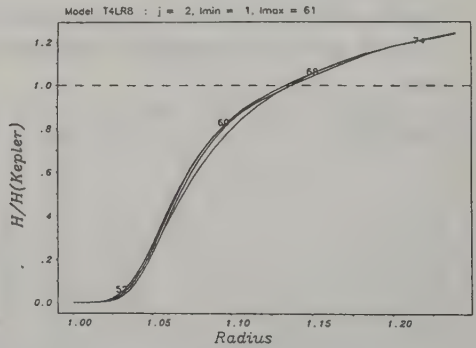


Abb. 7.4 Das Verhältnis der azimuthalen Winkelgeschwindigkeit zur Keplerrotation zu verschiedenen Modellzeiten (siehe Fußnote).

26) In dieser und den folgenden eindimensionalen Darstellungen wird jeweils die Abhängigkeit einer physikalischen Größe entlang einer Koordinatenrichtung gezeigt. Das Intervall ist mit l_{min} , l_{max} (bzw. j_{min} , j_{max}) bezeichnet und der Aufpunkt der komplementären Richtung (hier $j=2$) ist ebenfalls angegeben. Die Indizes an den einzelnen Kurven bezeichnen verschiedene Modellnummern, wobei spätere Rechenzeiten mit höheren Nummern versehen sind. Anhand dieser Darstellung läßt sich also die zeitliche Entwicklung einer Größe verfolgen. Ebenso können so verschiedene Modelle miteinander verglichen werden (s. Abschnitt 7.2).

7.1.2 Rechnungen mit festem $\dot{M}_{\text{in}}$

Als eine Verbesserung der vorherigen Modelle ist nun eine Scheibenstruktur vorgelegt worden. Dabei wurde auf die Scheibenmodelle von Meyer & Meyer-Hofmeister (1981, ab jetzt MMH) für den festen Wert von $\dot{M}_{\text{in}} = 10^{-9} M_{\odot}/\text{yr}$ zurückgegriffen. Mit Hilfe der Graphiken in MMH wurden analytische Ausdrücke für $T(r)$, $\Sigma(r)$ etc. entwickelt, und damit eine vertikale Schichtung (nach Abb. 7 in MMH) konstruiert. Weiterhin wurde eine halbwegs²⁷⁾ konsistente Atmosphärenschichtung um den WD vorgelegt.

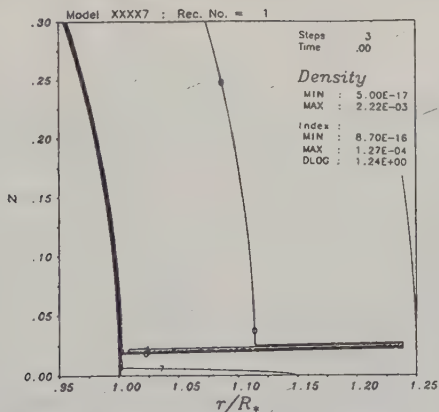


Abb. 7.5 Anfängliche Dichteverteilung bei einer vorgelegten Scheiben- und Sternatmosphärenstruktur.

Die Dichteverteilung eines solchen Anfangsmodells ist in Abb. (7.5) gezeigt. Jeweils in der Nähe des Sterns und der Scheibenoberfläche fällt die Dichte sehr steil ab, was durch die Konzentration der Höhenlinien in diesen Bereichen angezeigt wird. Ausgehend von diesem Zustand "beult" sich die Scheibe anfangs am Innenrand aus und Gas geringer Dichte expandiert (Abb. 7.6a, b).

Die Verteilung der Strahlungsenergie ist zu Beginn der Rechnungen stark durch die Scheibe dominiert (Abb. 7.7a), wird aber schon nach wenigen Zeitschritten durch die starke Energiefreisetzung am Innenrand geprägt, wo die keplersch rotierende Scheibe an den nicht-rotierenden Stern stößt (Abb. 7.7b). Es ist zu berücksichtigen, daß diese horizontale Verteilung der Strahlungsenergie nicht vorgegeben (die Scheibe endete bei dem in Abb. (7.5) deutlichen Rand), sondern erst berechnet wurde. Diese Struktur hat sich aus der ursprünglich sphärischen Verteilung von E um den Weißen Zwerg aufgrund der dominierenden Scheibe entwickelt. Man erkennt deutlich (vgl. mit Abb. 7.6b) die sehr starken Änderungen von E zu Beginn der Rechnungen. Dies ist die Erklärung für die im numerischen Teil (Kap. 5.6) erwähnte hohe Iterationszahl bei

27) Die Abweichung von der Selbstkonsistenz wird dadurch verursacht, daß im optisch dünnen äußeren Bereich ständig Materie "nachgefüttert" wird, falls die Dichte einen bestimmten Minimalwert unterschreitet. Dies ist dynamisch im wesentlichen bedeutungslos, beseitigt aber numerische Probleme mit andernfalls extrem niedrigen Dichten. Zum anderen ist momentan die räumliche Auflösung der Atmosphäre unzureichend, so daß die Temperaturen unrealistisch sind. Die Atmosphäre soll im wesentlichen als Puffer dienen, um einen direkten Aufprall der Scheibe auf einen festen Rand zu vermeiden, und um Verteilungsphänomene zu studieren.

der Lösung des linearisierten Gleichungssystems (5.32).

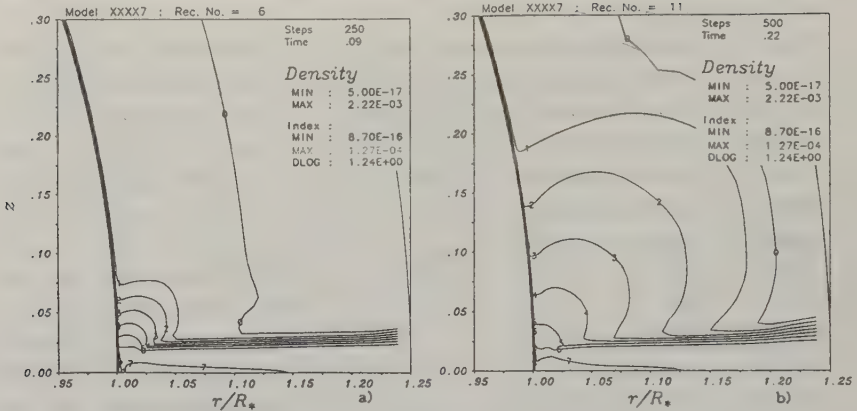


Abb. 7.6 Dichtekonturen in der Anfangsphase der Rechnung. Dort wo die Scheibe an den Stern 'stößt', erhitzt sich das Gas aufgrund starker Dissipation und expandiert.

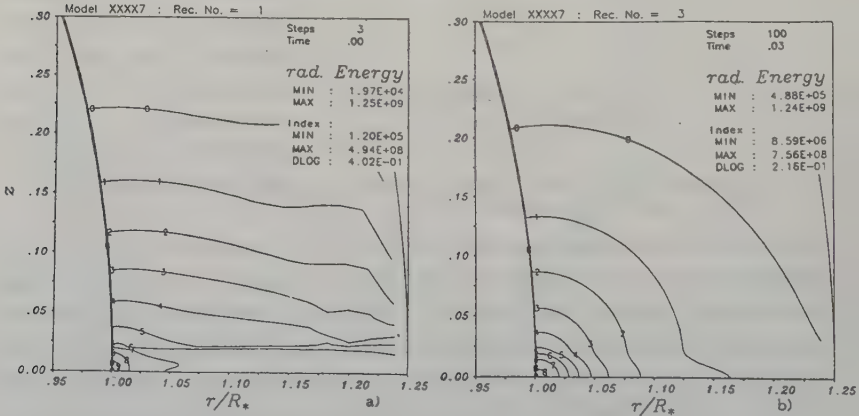


Abb. 7.7 Konturen der Strahlungsenergie in der Anfangsphase der Rechnungen. Sehr schnell beginnt die starke Energiefreisetzung im Zentrum der Scheibe zu dominieren (s. Text).

Im Verlauf der Entwicklung wird erneut der innere Bereich "leergefegt" (Abb. 7.8). Deutlich ist wieder die Materiekonzentration am Äquator zu sehen.

Für den Beobachter interessant ist die Temperaturverteilung, deren ungewöhnliches Aussehen die Abb. (7.9) zeigt. Betrachtet man im Moment nur die Scheibe, so ist deutlich eine starke Temperaturerhöhung in Bereichen geringer Dichte ($r \approx 1.20$) und/oder starker Dissipation ($r \approx 1.03$) zu erkennen. Der merkwürdige Schwanz im äußeren Bereich oberhalb der Scheibe ist vermutlich durch Unregelmäßigkeiten beim

Einstrom oder die inkonsistente Vorbelegung der Scheibe entstanden. Ansonsten ist die hohe Temperatur oberhalb der Scheibe um den Stern herum eine Folge der

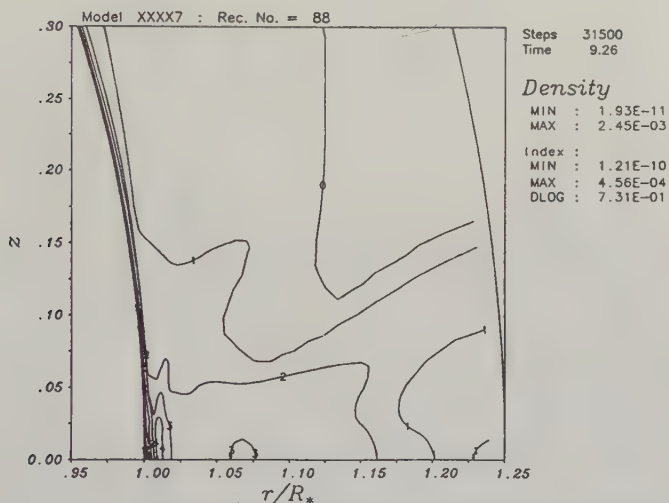


Abb. 7.8 Die quasistationäre Dichtestruktur eines Modells mit $\dot{M}_{\text{In}} = 10^{-9} M_{\odot}/\text{yr}$ und $r_{\text{max}} = 1.25$.

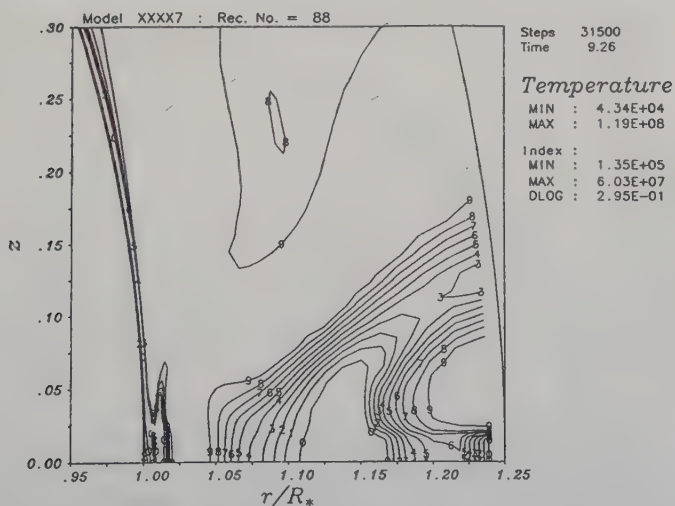


Abb. 7.9 Die quasistationäre Temperaturstruktur eines Modells mit $\dot{M}_{\text{In}} = 10^{-9} M_{\odot}/\text{yr}$ und $r_{\text{max}} = 1.25$.

extrem langen Kühlzeit des Gases, das eine ständige Aufheizung durch Dissipation erfährt und als *heiße Korona* betrachtet werden kann.

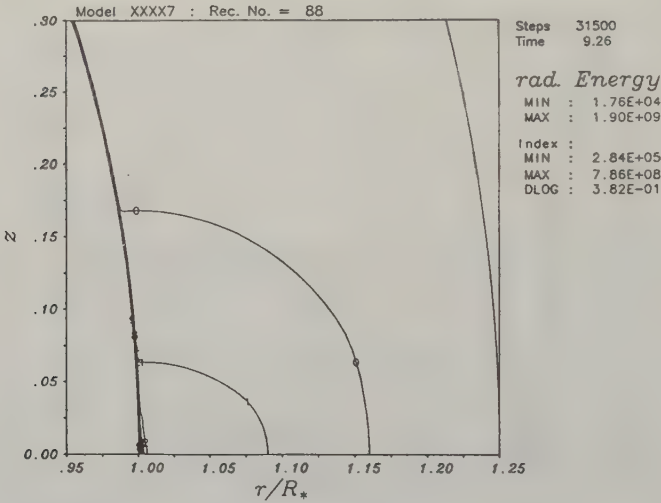


Abb. 7.10 Quasistationäre Verteilung der Strahlungsenergie (Modelldaten wie in Abb. 7.8, 7.9).

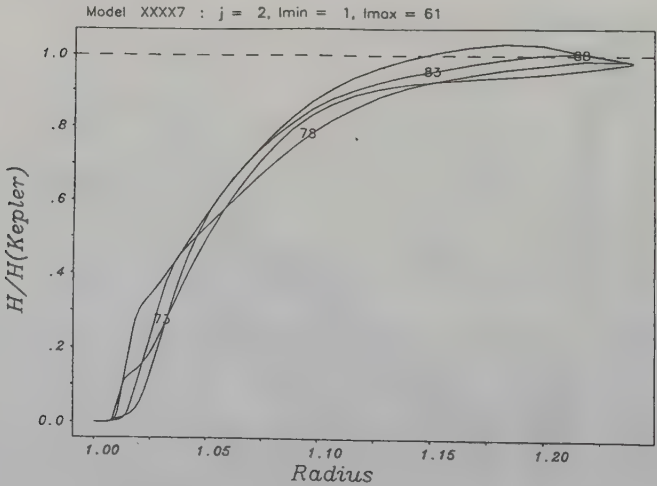


Abb. 7.11 Das Verhältnis der azimuthalen Winkelgeschwindigkeit zur Keplerrotation zu verschiedenen Modellzeiten.

Trotz dieser komplizierten Temperaturverteilung ist die Strahlungsenergie weiterhin völlig durch die Grenzschicht dominiert (Abb. 7.10). Dies zeigt die Entkopplung von Temperatur und Strahlungsenergie bei fehlendem thermischem Gleichgewicht. Die Rotationsgeschwindigkeit in der Scheibe weist stärkere zeitliche Fluktuationen auf (Abb. 7.11) und deutet auf ein noch nicht erlangtes Gleichgewicht.

Die mangelnde Ausprägung einer Übergangsschicht zwischen Scheibe und Stern, und die starke, vermutlich unrealistische, Temperaturerhöhung kann nun verschiedene Ursachen haben:

i) Der Rechenbereich ist zu klein.

Speziell Abb. (7.11) legt diese Vermutung nahe, weil die Winkelgeschwindigkeit schon dicht am äußeren Rand von der Kepler-Rotation abzuweichen beginnt.

ii) Der Masseneinstrom ist zu klein.

Der feste Einstrom von $10^{-9} M_{\odot}/yr$ ist nur der mittlere Wert bei CVs. Im Ausbruch liegt $\dot{M}_{in}$ über $10^{-8} M_{\odot}/yr$. Durch einen höheren Masseneinstrom befindet sich permanent mehr Materie in der Scheibe und ein kontinuierlicher Übergang wäre möglich mit gleichzeitiger Temperatursenkung bei kleinen Radien ($r \approx 1.03$).

iii) Keine Sternrotation.

Bei nicht-verschwindender Sternrotation ist die Dissipation in Sternnähe geringer, was eine Temperaturerniedrigung zur Folge hat.

Diese Möglichkeiten wurden noch in den folgenden endgültigen Modellen mitberücksichtigt.

7.2 Die Modelle

7.2.1 Beschreibung der Parameter

Diese Modellrechnungen beinhalten im wesentlichen die im letzten Abschnitt genannten Verbesserungen. Zusätzlich wird als Anfangsbedingung statt der Scheibenmodelle von Meyer & Meyer-Hofmeister, die mit anderen Opazitäten und Viskositätskoeffizienten, als sie hier verwendet werden, berechnet wurden, eine konsistente, gemäß Kap. (6.2) berechnete Scheibe vorgegeben. Dazu wird an zwei verschiedenen Radien ($r=1, r=1.50$) ein vertikales Scheibenmodell bei gegebenen $\dot{M}_{\text{in}}$, M_{WD} und v (Werte siehe nächste Seite) berechnet (vgl. Abb. 6.13, S. 82) und die Zwischenwerte logarithmisch interpoliert.

Die Modelle lassen sich im wesentlichen in zwei Gruppen unterteilen. Der Unterschied besteht in einer relativ geringen Änderung der Anfangsbedingungen. Bei der Vorbelegung der anfänglichen Scheibenstruktur wird auch die azimuthale Winkelgeschwindigkeit ω_{φ} vorgegeben. Innerhalb der Scheibe ist dies der keplersche Wert, aber an ihrem oberen Rand sollte ω_{φ} auf Null abfallen, denn die Atmosphäre ist zu Beginn der Rechnungen nicht-rotierend. Dieser Übergang sollte zur Vermeidung von numerischen Problemen möglichst kontinuierlich sein. Im

1. Fall wird nun dieser Übergang innerhalb der Scheibe vollzogen, so daß die oberen Schichten langsamer rotieren als die unteren. Im
2. Fall dagegen rotiert die gesamte Scheibe keplersch und erst oberhalb schließt sich das Übergangsgebiet an.

Dies ist nur ein kleiner Unterschied²⁸⁾, aber im 1. Fall sind die Dichten und somit auch die Dissipation im Übergangsbereich wesentlich höher, was zu einer veränderten Dynamik führen kann. Bis auf die Radialgeschwindigkeit zeigen die beiden Typen aber zumindest qualitativ eine gute Übereinstimmung.

In beiden Fällen wird jeweils ein Modell mit nicht-rotierendem Stern ($\omega_{*} = 0$) und eins mit $\omega_{*} = 0.33 \omega_{\kappa} (r = R_{*})$ gerechnet. Da alle bisherigen Modelle vereinfachend ohne Berücksichtigung des Strahlungsdrucks und ohne den $\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P})$ -Term in der Strahlungsenergiegleichung berechnet wurden, ist im zweiten Fall noch ein Modell, das diese Terme mit einschließt, berechnet worden. Die Abweichungen erweisen sich allerdings als minimal. Eine kurze Übersicht über die verschiedenen Modelle gibt die Tab. 7.1.

²⁸⁾ Die Ursache für diese anscheinend subtile Unterscheidung liegt in der Tatsache begründet, daß Modelle, die zuerst mit dem Typ 1 gerechnet wurden, zu Beginn der Rechnungen eine starke Abweichung der Rotationsgeschwindigkeit (nach unten) vom keplerschen Wert zeigten. Um zu untersuchen, ob dieser Effekt durch die zu starke Dissipation in der Scheibe wegen des vertikalen Abfalls von ω_{φ} verursacht ist, wurde dann beim Typ 2 der Übergangsbereich oberhalb der Scheibe verlegt.

Modell	Typ	Rotation	$p_{\text{rad}} / \nabla \cdot (u \cdot P)$
LDTR4	1	0	0
LDTR5	1	1	0
LDTR3	2	0	0
LDTR9	2	1	0
LDTR2	2	0	1

Tab. 7.1 Eine Übersicht über einige Modellparameter.

Bei allen Modellen wurden die folgenden festen Parameter benutzt:

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_{\text{in}} &= 10^{-8} M_{\odot} / \text{yr} \\
 T_{\text{WD}} &= 1.5 \cdot 10^4 \text{ K} \\
 \nu &= 10^{15} \text{ cm}^2 / \text{s} \\
 M_{\text{WD}} &= 1.0 M_{\odot} .
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Der Wert der festen Einstromrate $\dot{M}_{\text{in}}$ stimmt gut mit der Scheibendurchstromrate von CVs während des Ausbruchs überein (vgl. Abb. 2.3) und ist deutlich höher als bei den vorherigen Rechnungen. Es werden hier also Ausbruchmodelle der BL simuliert. Der Radius des Weißen Zwergs wird aus der angeführten Masse-Radius-Relation (Gl. 6.9) berechnet. Die Masse des Weißen Zwergs liegt im oberen Bereich der beobachteten Werte für CVs (Ritter, 1987), wird aber trotz allem häufig in Rechnungen verwendet. Der kinematische Viskositätskoeffizient ν ist an die aus den Beobachtungen (Abschnitt 2.2.4) abgeleitete Größenordnung angepaßt (s. S. 18). Nach anfänglicher Entwicklung, ähnlich wie bei den obigen Modellen (Abb. 7.5, 7.6) entstand bei allen Modellen schließlich ein quasi-stationärer Zustand mit nur noch langsamen Änderungen.

Noch eine kurze Bemerkung zur Rechenzeit. Da die Modelle Entwicklungsrechnungen sind, die eigentlich unbegrenzt fortgesetzt werden könnten, werden sie trotz allem dann gestoppt, wenn nur noch geringe Änderungen der Strukturen zu verzeichnen sind. Da das Programm, wie schon erwähnt, sehr rechenzeit-intensiv ist, werden etwa **50-100 Stunden (!)** an reiner **CPU-Zeit** pro Modell (auf einer CDC Cyber 995) benötigt.

7.2.2 Allgemeiner Überblick

Eine Übersicht über die Ähnlichkeit der entstehenden Strukturen gibt die Abb. (7.12). Der wichtigste Punkt ist die **Konzentration** der Materie **in der Äquatorebene**.

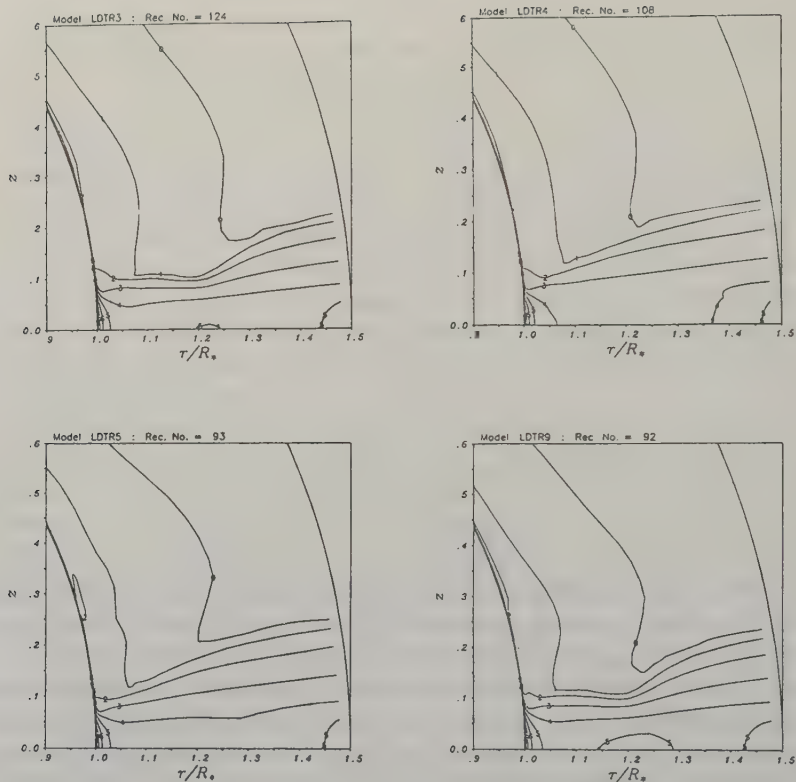


Abb. 7.12 Vergleichende Gegenüberstellung der finalen Dichtekonturen von vier verschiedenen Modellen.

Es wandert kaum Materie zu den Polen, sondern es bildet sich eine **Grenzschicht**²⁹⁾ als äquatorialer Gürtel. Dies steht im Gegensatz zu den Modellen ohne Strahlungstransport, bei denen sich die Materie adiabatisch um den ganzen Stern angelagert hat (s. Abschnitt 6.4, bzw. KH). Dieser entscheidende, zunächst nicht erwartete Unterschied erklärt sich durch die Möglichkeit der Materie, nun ihren starken Zugewinn an innerer Energie abstrahlen zu können. Der thermische Druck verringert sich, und das Gas expandiert **nicht** mehr zu den Polen.

Bei allen Modellen erkennt man wieder eine Verdünnung der Materie zwischen

29) Wenn im folgenden von dem **Grenzschichtbereich** die Rede ist, bezieht sich dies auf den kleinen sternnahen Bereich ($r \lesssim 1.15$) in der Nähe des Äquators ($\alpha \lesssim 5^\circ$).

Außen- und Innenrand, aber nicht so kraß wie in den vorherigen Modellen. Gleichzeitig hat sich die Scheibe leicht aufgebläht. Die 3-D-Darstellung³⁰⁾ der Dichte (Abb. 7.13) zeigt deutlicher den starken Dichteanstieg in der Grenzschicht. Man beachte da-

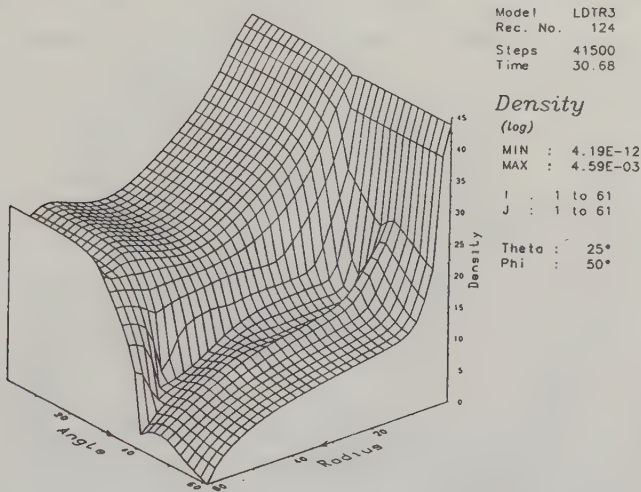


Abb. 7.13 3-D-Darstellung der Dichteschichtung eines Modells mit nicht-rotierendem Stern (siehe Fußnote).

bei die logarithmische Darstellung mit 9 (!) Größenordnungen zwischen maximalem und minimalem Wert. Die Aufweitung der Scheibe ist besonders stark am äußeren Rand, was auf eine leicht inkonsistente Randbedingung schließen läßt. Die Dichte am Sternrand (bei höheren Breiten) hat sich dagegen kaum verändert, und bestätigt qualitativ die Begrenzung der Grenzschicht auf den Äquatorbereich.

Innerhalb der Scheibe bewegt sich die Materie mit zunehmender Radialgeschwindigkeit auf den Stern zu (Abb. 7.14). Oberhalb der Scheibe strömt das Gas mit hoher Geschwindigkeit nach außen. Dieser Effekt hat sich schon bei den Modellen ohne Strahlungstransport gezeigt, und ist u.a. eine Konsequenz der Drehimpulserhaltung.

30) Bei den 3-D-Darstellungen ist zu beachten, daß diese den physikalischen Bereich verzerrt wiedergeben, weil die Achsen immer äquidistant in den Gitterindizes sind, deren Intervall in der Legende angegeben ist. Weiterhin sind die Einheiten der entsprechenden physikalischen Größe in der Zeichnung selbst (die Achsenskalierung) nicht korrekt, sondern so gewählt, daß sich ein "ansprechendes" Bild ergibt. In der Legende ist aber der korrekte dargestellte Bereich (in cgs) angegeben. Die Winkel Theta, und Phi beziehen sich auf den Blickwinkel, und zwar gilt $\tan \varphi = x/y$ und $\cos \vartheta = z/\tilde{r}$, wenn $x \sim i$, $y \sim j$ und $z \sim$ der physikalischen Größe mit $\tilde{r} = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist.

Zum einen wird die anfangs in Ruhe befindliche Quasi-Atmosphäre um den Stern in azimuthaler Richtung beschleunigt, es wird also Drehimpuls übertragen, und aufgrund der Zentrifugalkräfte wird sie dann hinausgetrieben. Zum anderen transportiert so ein geringer Teil der Scheibenmaterie effektiv Drehimpuls nach außen. Dieses charakteristische Strömungsprofil widerlegt Urpins³¹⁾ (1983, 1984) Resultate, die auch nicht plausibel erschienen (s. Abschnitt 2.1.2). Die ausströmende Materie entspricht nur einem sehr geringen Teil ($\approx 0.1\%$) der hineinkommenden Gasmenge, und nur ein kleiner Bruchteil des Gases bewegt sich mit geringer Geschwindigkeit zu höheren stellaren Breiten hin.

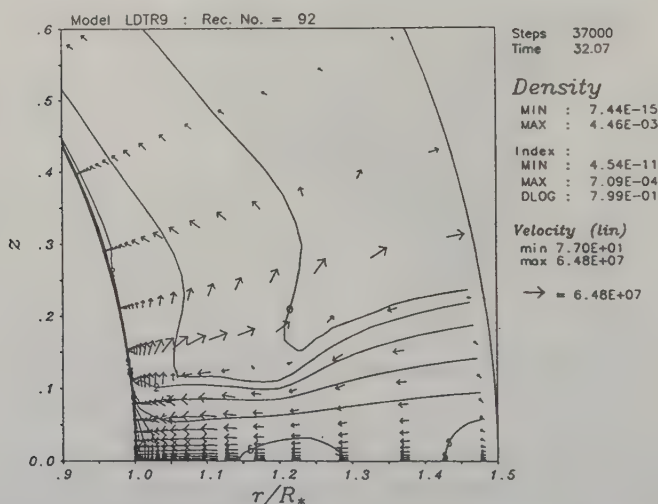


Abb. 7.14 Das Geschwindigkeitsfeld eines Modells mit rotierendem Stern. Dargestellt sind die Pfeile an jedem dritten Gitterpunkt.

Das "Gebirge" der Strahlungsenergie (Abb. 7.15) zeigt wie die Dichte ebenfalls einen steilen Anstieg in Scheibe und Grenzschicht. Die Abstrahlung der Scheibe dominiert wegen der höheren Temperaturen (s.u.) deutlich über der des Sterns. Auch die 2-D-Darstellung (Abb. 7.16) bestätigt diesen Befund. Der Strahlungsfluß kommt folglich vor allem aus der Richtung des Grenzschichtbereichs (Abb. 7.17). Bei größeren Abständen vom Stern (etwa zwischen 1.2 und 1.4 Sternradien) ist der Fluß senkrecht von der Äquatorebene weggerichtet. Anhand dieser Abbildung könnte als Übergang Grenz-

31) Er fand genau den umgekehrten Effekt. Einen Wegstrom vom Stern im Scheibenzentrum und Zustrom in den oberen Schichten (s. S. 10).

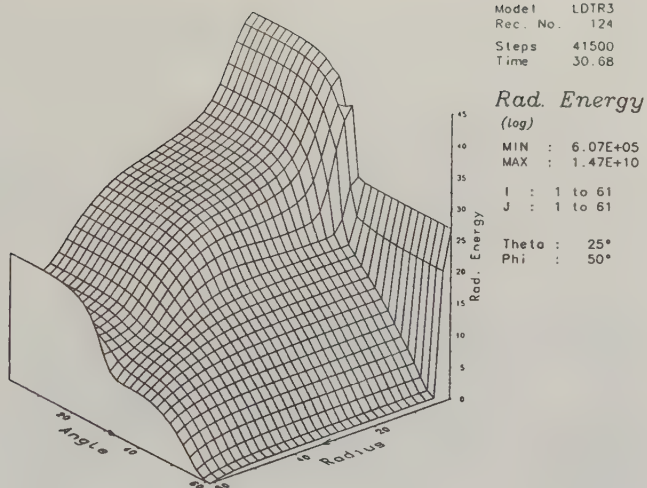


Abb. 7.15 3-D-Darstellung der Strahlungsenergie bei nicht-rotierendem Stern.

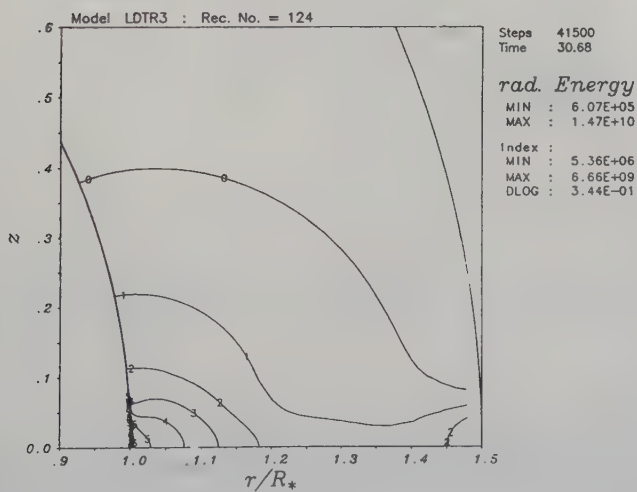


Abb. 7.16 2-D-Darstellung der Strahlungsenergie bei nicht-rotierendem Stern.

schicht-Scheibe auch der Abstand vom Stern gewählt werden, von dem ab der Fluß (im Scheibenzentrum) deutlich vertikal, anstatt radial nach außen gerichtet ist. Dieser Punkt läge nach Abb. (7.17) bei $r \approx 1.2 R_*$. Bei allen Darstellungen zeigt sich deutlich, daß die äußere Randbedingung im Scheibenbereich ($r=r_{\max}$, $\alpha \leq \alpha_{\text{disc}}$) nicht konsistent mit der berechneten Struktur ist. Siehe z.B. die Unstetigkeiten in der Dichte (Abb. 7.13) und Strahlungsenergieverteilung (Abb. 7.15) und damit den nach innen gerichteten Fluß (Abb. 7.17). Es bleibt zu hoffen, daß dies die Ergebnisse der Rechnungen in Bezug auf die Grenzschicht nicht zu stark beeinflusst hat, aber weitere Untersuchungen dieses Punktes sind sicherlich notwendig.

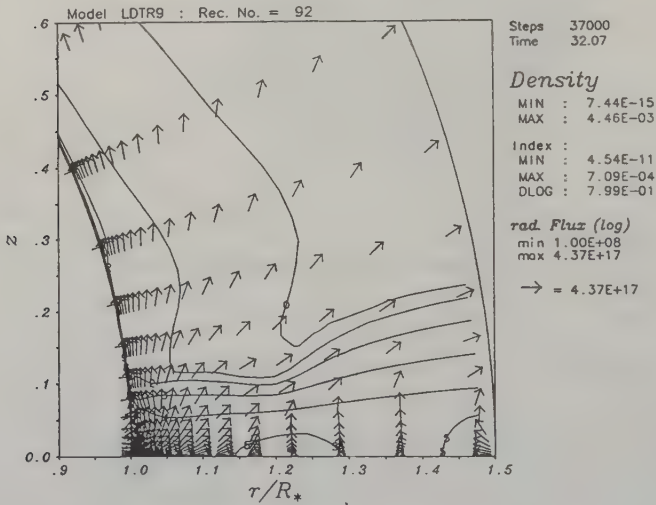


Abb. 7.17 Feld des Strahlungsflusses beim Modell LDTR9 (s. Diskussion im Text).

Im folgenden seien einzelne Aspekte der Ergebnisse genauer untersucht, wobei die speziellen Punkte an einem ausgewählten Modell (LDTR9) exemplarisch dargestellt werden.

- Temperaturen

Die Temperaturverteilung ist in Abb. (7.18) für den nicht-rotierenden Stern dargestellt. Oberhalb der Scheibe steigt die Temperatur erneut wegen der stetigen Energiedissipation bei gleichzeitig kleiner Kühlrate stark an. Es hat sich eine **heiße Korona** mit $T \approx 10^8$ K gebildet. Innerhalb der Scheibe steigt die Temperatur wie bei Akkretions-

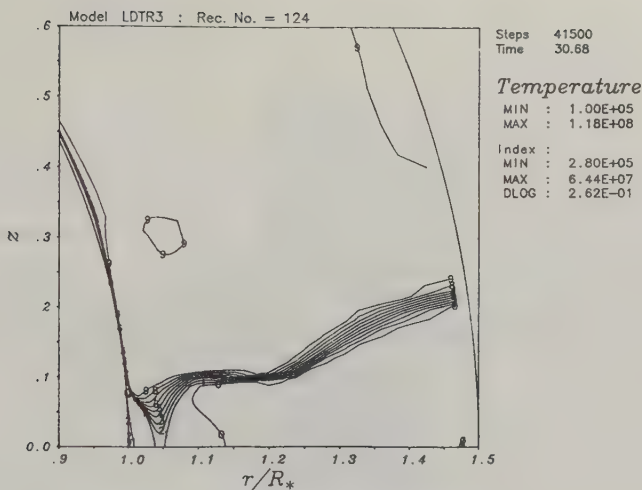


Abb. 7.18 Linien gleicher Temperatur bei nicht-rotierendem Stern.

scheiben üblich zum Stern hin an. Eine wichtige Besonderheit ist allerdings ein **Temperaturmaximum** oberhalb der Sternoberfläche bei $r \approx 1.05 R_*$.

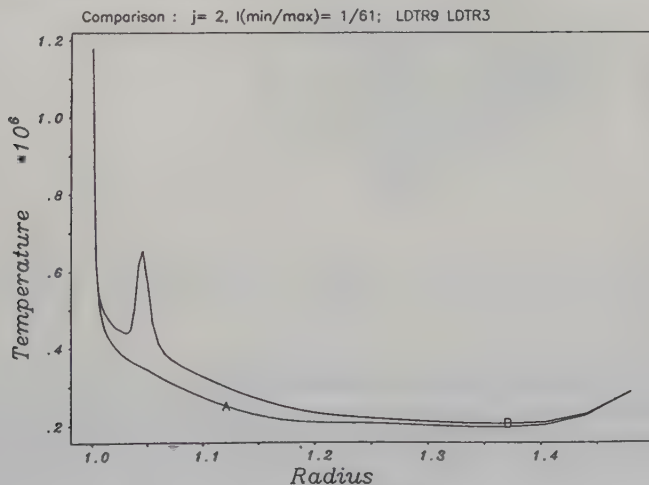


Abb. 7.19 Vergleich der radialen Temperaturabhängigkeit von zwei Modellen ohne (B) und mit (A) Sternrotation im Zentrum der Scheibe.

Ein Temperaturvergleich zwischen Modellen mit und ohne Rotation bestätigt die obige Überlegung einer Temperaturniedrigung im Fall einer nicht-verschwindenden Rotation des Zentralsterns, denn in diesem Fall ist die Temperatur (in der Nähe des Sterns bis $r \approx 1.15$) deutlich niedriger, wie ein direkter quantitativer Vergleich des radialen Temperaturverlaufs in der Scheibenmitte (Abb. 7.19) zeigt. Im Fall des nicht-rotierenden Sterns sind die Temperaturen im Mittel um ca. 50000 K höher (für $r \lesssim 1.15$) und liegen bei Absolutwerten um die $(3-4) \cdot 10^5 K$. Die Spitze in der Temperaturkurve bei $r \approx 1.05$ im Fall des nicht-rotierenden Sterns ist durch eine höhere Dissipation wegen des steileren radialen Gradienten der Winkelgeschwindigkeit (s.u) verursacht. Weil gerade in diesem Bereich auch die Dichte des Gases ein relatives Minimum hat, kann die Materie nicht ausreichend gekühlt werden mit der Temperaturspitze als Konsequenz. Die 3-D-Darstellung des inneren Bereichs (bis $i=40 \hat{=} r \approx 1.08$) zeigt

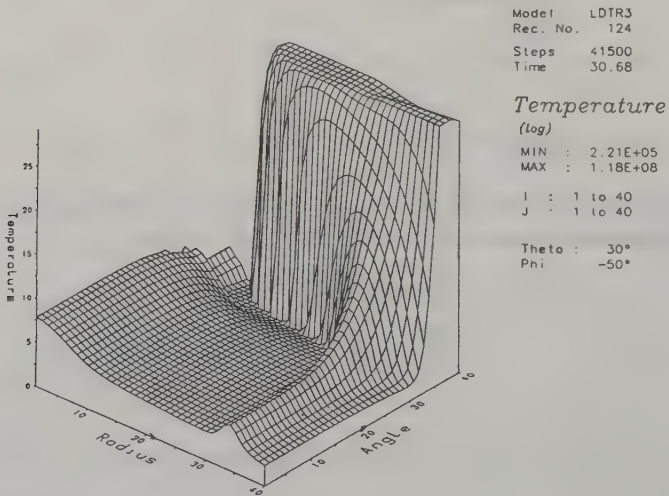


Abb. 7.20a 3-D-Darstellung der Temperaturen im inneren Teil des Rechenbereichs (nicht-rotierender Stern).

ebenfalls deutlich die Auswirkung der Sternrotation auf die Temperaturverteilung (Abb. 7.20). Wenn der Stern nicht rotiert, erstreckt sich bei $r \approx 1.05$ ein relatives Temperaturmaximum (der Gebirgsrücken) von der Scheibenmitte bis zur Oberfläche³²⁾.

32) Die Scheibenoberfläche ist der Punkt, an dem die optische Tiefe gleich eins ist. Eine genaue Definition ist in Abschnitt (7.3) angegeben.

Wegen mangelnder Kühlung verstärkt sich das Maximum bei höheren Breiten und

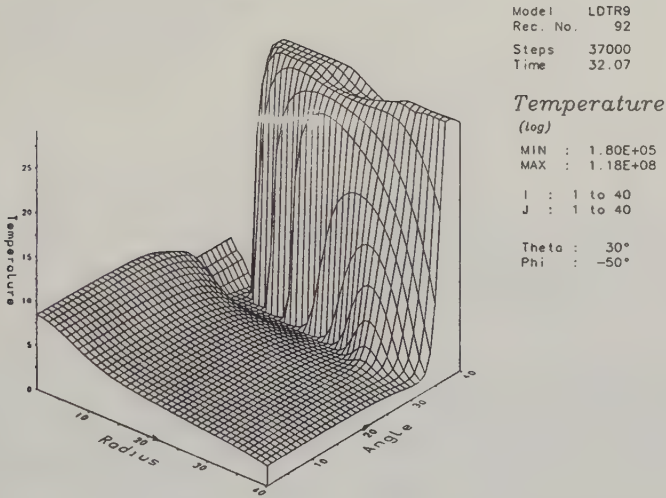


Abb. 7.20b 3-D-Darstellung der Temperaturen im inneren Teil des Rechenbereichs (rotierender Stern).

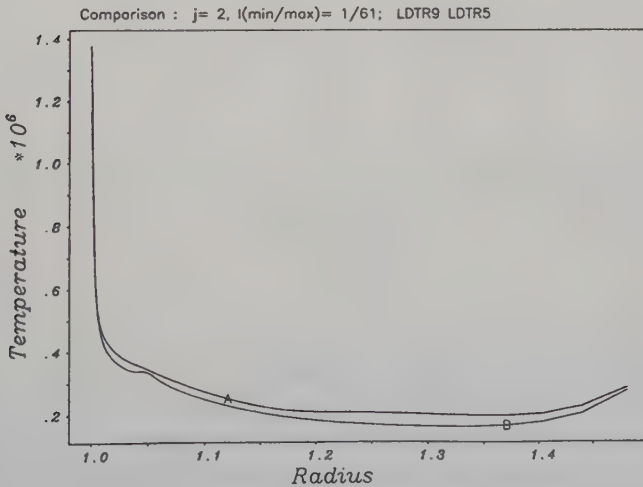


Abb. 7.21 Vergleich der radialen Temperaturabhängigkeit von zwei Modellen vom Typ 1 (B) und Typ 2 (A) im Zentrum der Scheibe.

geht schließlich in die heiße Korona über. Bei rotierendem Stern (Abb. 20b) ist dieser Effekt nur an der Scheibenoberfläche zu bemerken. Ein Vergleich der zwei unterschiedlichen Modelltypen untereinander zeigt nur einen geringen Unterschied der Temperatur bis zu 20000 K (Abb. 7.21). In der Nähe des Sterns steigen dann die Temperaturen bei allen Modellen wieder steil an.

- Dissipation und Winkelgeschwindigkeit

Die Grenzschicht im Standardmodell beginnt dort, wo die radiale Ableitung der Winkelgeschwindigkeit verschwindet (vgl. Abb. 3.1). In diesen Rechnungen liegt dieser Punkt bei allen Modellen (egal, ob rotierender Stern oder nicht) bei etwa $1.12 R_*$ (Abb. 7.22). Nach diesem Kriterium wäre die Grenzschicht wesentlich ausge-

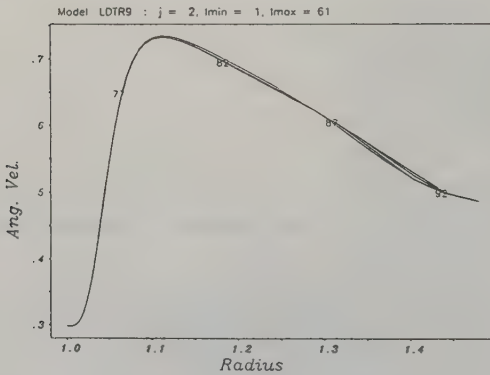


Abb. 7.22

Radiale Abhängigkeit von ω_φ zu verschiedenen Zeitpunkten für ein Modell mit rotierendem Stern.

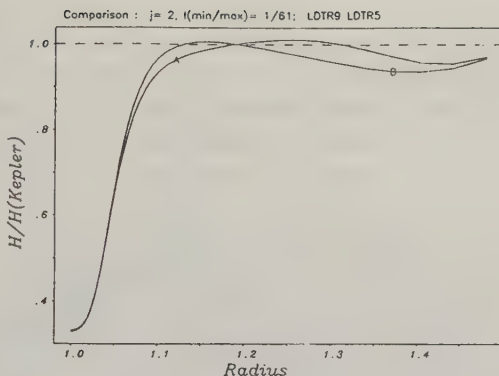
dehnter, als vorher allgemein angenommen worden ist (vgl. Abschnitt 3.1). Benutzt man dagegen die übliche Abschätzung der Grenzschichtdicke in der Hydrodynamik (s. Landau & Lifshitz, 1987, S. 162), so erhält man mit

$$\delta_{BL} = \sqrt{\nu / \Omega_K(R_*)} \quad (7.2)$$

und den obigen Modellparametern $\delta_{BL} = 0.064 R_*$. Dieser Wert stimmt größenordnungsmäßig gut mit Abb. (7.22) überein. Innerhalb von $r \approx 1.12$ fällt die Winkelgeschwindigkeit steil ab bis auf den Wert an der Sternoberfläche. Außerhalb beginnt die Abweichung von der Kepler-Rotation schon etwas früher, und zwar bei den Modellen vom Typ 1 bei $r \approx 1.15$ und jenen vom Typ 2 bei $r \approx 1.20$ (Abb. 7.23). Die Winkelgeschwindigkeit schwankt außerhalb von ω_{max} leicht um den keplerschen Wert mit Abweichungen von bis zu 5%.

Abb. 7.23

Vergleich der Winkelgeschwindigkeit zwischen Typ 1 (B) und Typ 2 (A)



Die spez. Dissipationsrate $\tilde{\Phi} (= \Phi/\rho)$ ist im Bereich außerhalb des Maximums von ω_φ , also im keplersch rotierenden Teil näherungsweise konstant. Der theoretische Wert liegt bei (vgl. Gl. 6.7)

$$\tilde{\Phi}_{th} = \frac{9}{4} \frac{GM_{WD}}{r^3} \nu = 1.10 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2/\text{s}^3 \quad (7.3)$$

(für $M_{WD} = 1.0 M_\odot$, $\nu = 10^{15} \text{ cm}^2/\text{s}$, $r = 1.2 R_*$), was sehr gut mit dem numerischen Wert von ca. $10^{15} \text{ cm}^2/\text{s}^3$ (Abb. 7.24) übereinstimmt. Innerhalb des Maximums von ω_φ steigt die spez. Dissipationsrate wegen des steilen Gradienten von ω_φ stark an, mit einem um mehr als zwei Größenordnungen höheren Maximum im Vergleich zur

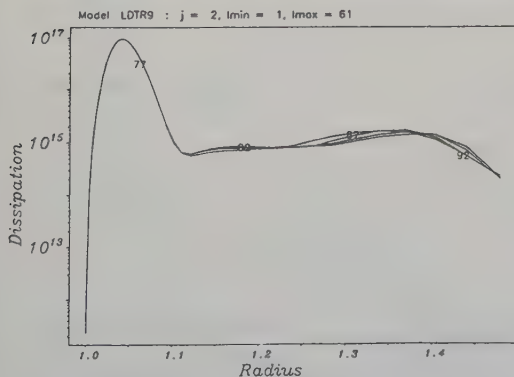


Abb. 7.24

Die radiale Abhängigkeit der Dissipationsfunktion beim rotierenden Stern

Kepler-Rotation. Im Maximum von ω_φ bei $r \approx 1.12$, der klassischen Grenzschichtdicke (= Position der inneren Randbedingung der Standardscheibentheorie) fällt die Dissi-

pation in diesen Rechnungen **nur ganz leicht ab** im **Gegensatz** zur Standardscheibe³³⁾. Interessant ist nun die Untersuchung der Höhe des Anteils der $r\varphi$ -Komponente des viskosen Spannungstensors zur Gesamtdissipationsrate. Im Bereich der Kepler-Rotation wird im wesentlichen der gesamte Beitrag durch die $T_{r\varphi}$ -Komponente geliefert (Abb. 7.25), so daß die alleinige Berücksichtigung dieses Anteils in der einfachen analytischen eindimensionalen Scheibentheorie (Kap. 2.1) gut gerechtfertigt ist. Beim

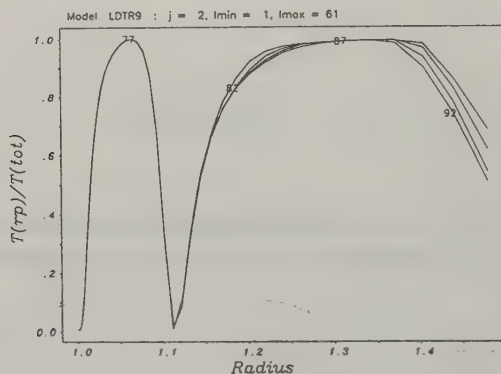


Abb. 7.25

Der Anteil der $T_{r\varphi}$ -Komponente an der Gesamtdissipation

Maximum von ω_φ trägt die $T_{r\varphi}$ -Komponente dagegen erwartungsgemäß nichts bei, so daß hier die anderen Komponenten einen wesentlich höheren (auch absolut gesehen) Beitrag liefern müssen. Die Substitution erfolgt vor allem durch die T_{rr} -Komponenten-

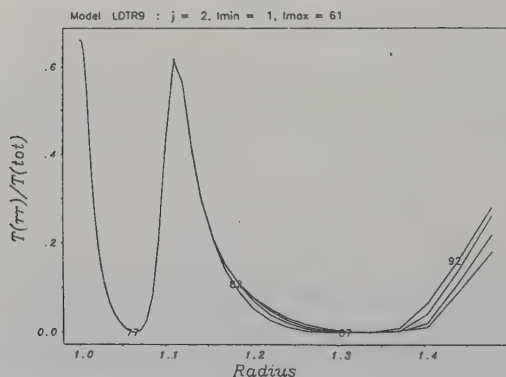


Abb. 7.26a

Der Anteil der T_{rr} -Komponente an der Gesamtdissipation

33) In der Standardscheibentheorie fällt die Dissipation an diesem Punkt auf Null ab, was für die verschwindenden Temperaturen in manchen Scheiben- und Grenzschichtmodellen verantwortlich ist (s. Kap. 3.1).

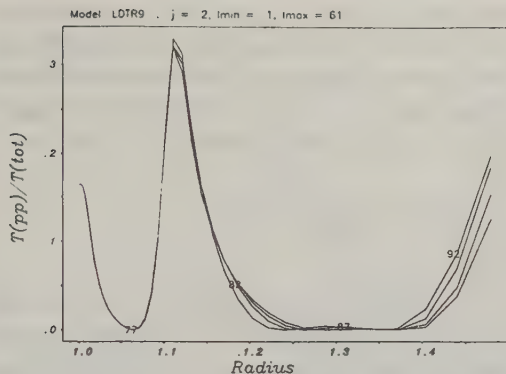


Abb. 7.26b

Der Anteil der $T_{\varphi\varphi}$ -Komponente an der Gesamtdissipation

te, d.h. durch den steilen Anstieg der radialen Einfallsgeschwindigkeit in diesem Bereich (s. nächsten Abschnitt). Die Abb. (7.26) veranschaulicht, daß die Beiträge zu Φ durch T_{rr} und $T_{\varphi\varphi}$ fast 100% ausmachen³⁴⁾. Ein direkter Vergleich der Dissipationsraten von rotierendem und nicht-rotierendem Stern (Abb. 7.27) bestätigt die deutlich erhöhte Energiefreisetzung und damit die verbundenen höheren Temperaturen im zweiten Fall.

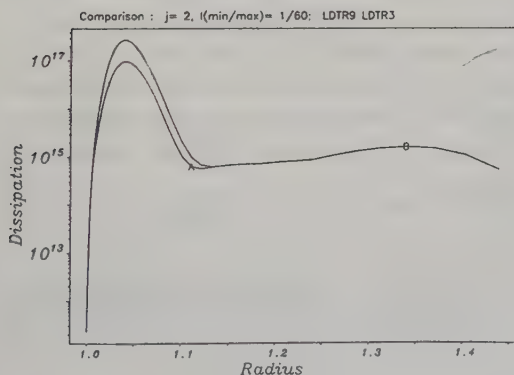


Abb. 7.27

Vergleich der Dissipation zwischen rotierendem (A) und nicht-rotierendem (B) Stern.

- Radialgeschwindigkeiten

Abb. (7.28) zeigt den typischen Verlauf der radialen Einfallsgeschwindigkeiten. Dort, wo das zentrifugale Gleichgewicht aufgehoben ist, d.h. wo $\omega_{\varphi} < \omega_K$ gilt, wird

³⁴⁾ Vgl. dazu auch die genaue Definition der einzelnen Tensorkomponenten (Gl. 4.45).

die Materie stark nach innen beschleunigt und weiter innen wieder abgebremst, weil sich nun hydrostatisches Gleichgewicht (starker ρ und T Anstieg s.u.) einstellt. Ein wesentliches Ergebnis ist die **starke radiale Überschallströmung**. Fast im gesamten Bereich ist die Machzahl $Ma = |u_r|/c_s$ größer als eins, wobei Werte bis $Ma = 6$

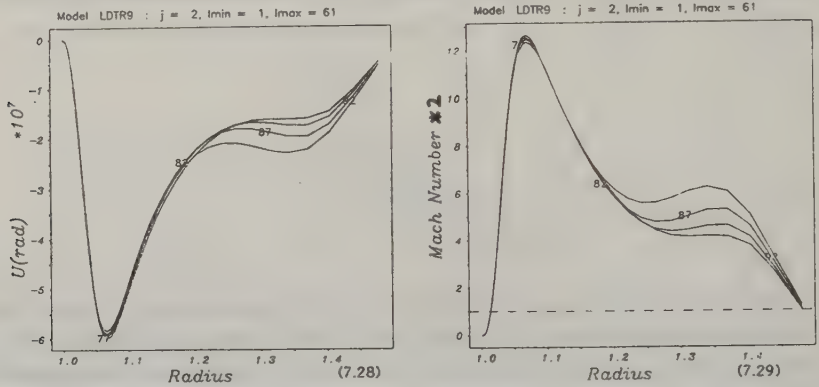


Abb. 7.28, 7.29 Die radiale Geschwindigkeit (7.28) und die Machzahl (7.29) für das Modell LDTR9 im Scheibenzentrum.

erreicht werden (Abb. 7.29). Der Maximalwert ist dabei relativ unabhängig vom Modell. Dies Resultat bestätigt die Ergebnisse der 1-D-Rechnungen von Papaloi-zou & Stanley (1986), die ebenfalls radiale Überschallströmungen fanden. Das Prin-glesche Argument einer dann fehlenden Kommunikation der Anwesenheit eines Innenrandes nach außen (z.B. Pringle, 1977) läßt sich also auch hier nicht bestätigen. Die zeitliche Entwicklung (Abb. 7.28) zeigt auch keinerlei Abnahme mit der Zeit, die das Überschallphänomen nur als ein vorübergehendes, durch die Anfangsbedin-

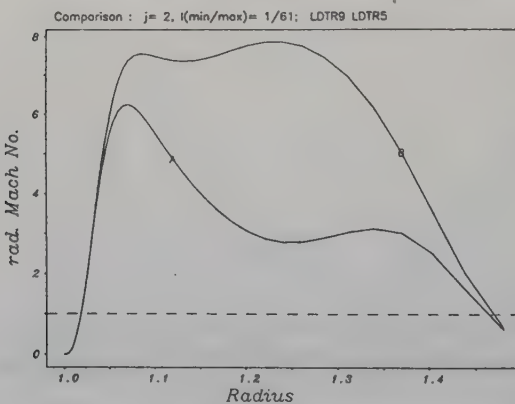


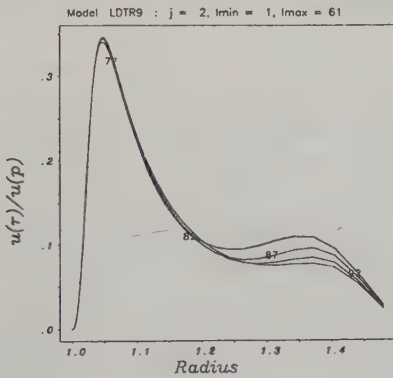
Abb. 7.30

Vergleich der Machzahlen zwischen Modellen vom Typ1 (B) und Typ2 (A).

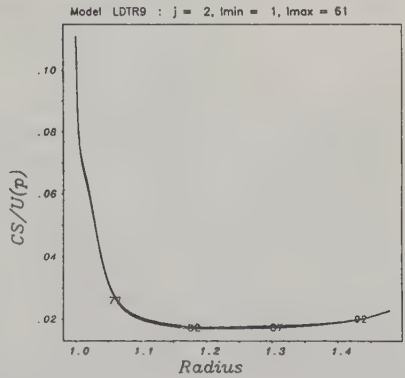
gung verursachtes, herausstellen würde. Im Gegenteil, die Machzahl scheint bei diesem Modell noch zuzunehmen und sich den Werten des zweiten Typs (Abb. 7.30), die generell etwas höher liegen, anzunähern. Trotz diese starken Anstiegs der radialen Geschwindigkeit ist diese immer noch bedeutend kleiner als die azimuthale Geschwindigkeitskomponente (Abb. 7.31). Das Ergebnis der Standardscheibentheorie von

$$\frac{|u_r|}{u_\varphi} = \frac{3}{2} \frac{v}{\sqrt{GM_{WD} r}} \approx 5.0 \cdot 10^{-3} \quad (7.4)$$

(für $r = 1.2 R_*$) wird allerdings mit $\frac{|u_r|}{u_\varphi} \approx 0.1$ in der Scheibe deutlich überschritten. Offensichtlich hat sich die Information eines inneren Randes schon im ganzen Rechenbereich bemerkbar gemacht. Für die Schallgeschwindigkeit gilt in der Scheibe mit $c_s \approx 0.02 u_\varphi \ll u_\varphi$ allerdings gut die Näherung der Standardscheibentheorie (Abb. 7.32).



(7.31)



(7.32)

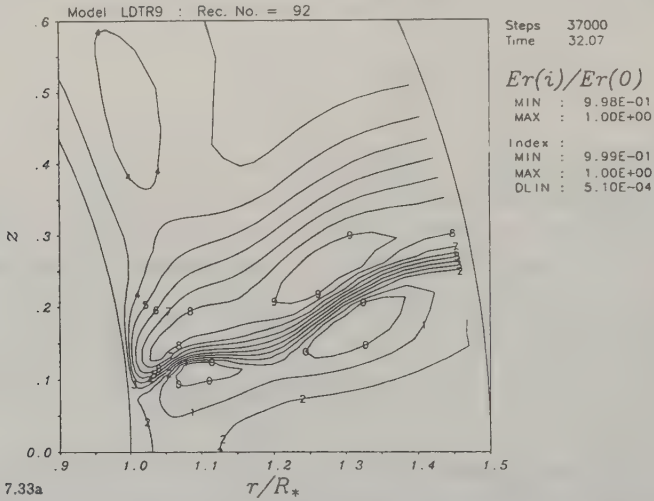
Abb. 7.31, 7.32 Das Verhältnis $|u_r|/u_\varphi$ (7.31) und c_s/u_φ (7.32) für das Modell LDTR9 im Scheibenzentrum.

Die vertikale Geschwindigkeitskomponente ist gegenüber der radialen in der Scheibe mit $|u_\alpha| \approx 2.5 \cdot 10^{-3} |u_r|$ vollkommen vernachlässigbar.

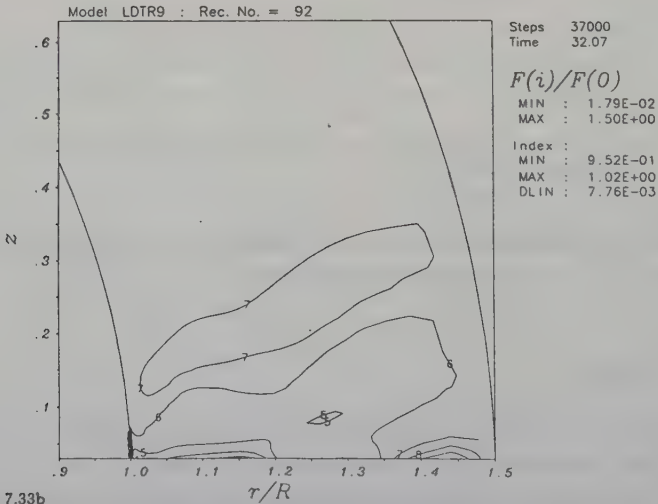
- Inertiale Größen

Die Gleichung der Strahlungsenergie wird im *Comoving frame* gelöst. Um zu überprüfen, ob das vorliegende Geschwindigkeitsfeld eine stärkere Abweichung von Größen im mitbewegten und Laborsystem bedeutet, sind in Abb. (7.33) die Verhältnisse von inertialen zu *comoving* Größen $Er(i)/Er(o)$ und $F(i)/F(o)$ als Höhenlinien

aufgetragen. Die Werte der Strahlungsenergie (Abb. 7.33a) weichen maximal um 0.1% voneinander ab, und auch beim Fluß (Abb. 7.33b) ist die Abweichung recht klein. Es ist also bei der Akkretion auf Weiße Zwerge nicht einmal nötig, die Terme der Ordnung (u/c) in den Gleichungen mit zu berücksichtigen.



Das Verhältnis von inertialen zu *comoving* Werten für die Strahlungsenergie (hier mit Er bezeichnet).



Das Verhältnis von inertialen zu *comoving* Werten für die Strahlungsfluß

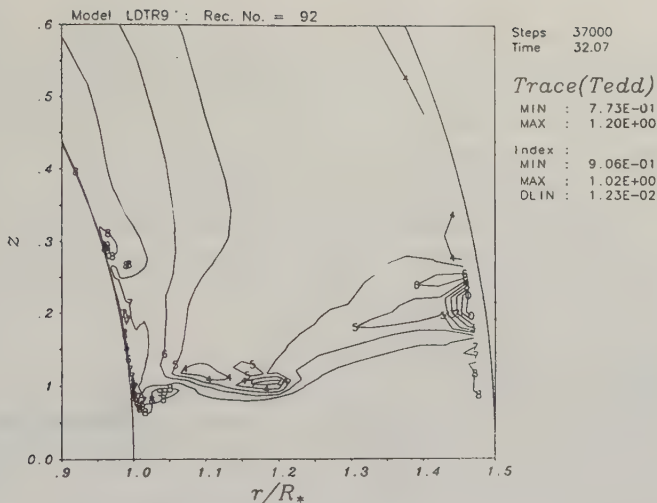


Abb. 7.34 Die Spur des Eddington-Tensors.

Die Abb. (7.34) bestätigt die gute Übereinstimmung der Spur des Eddington-Tensors mit dem konstanten theoretischen Wert von eins. Ein Vergleich der Modelle LDTR2

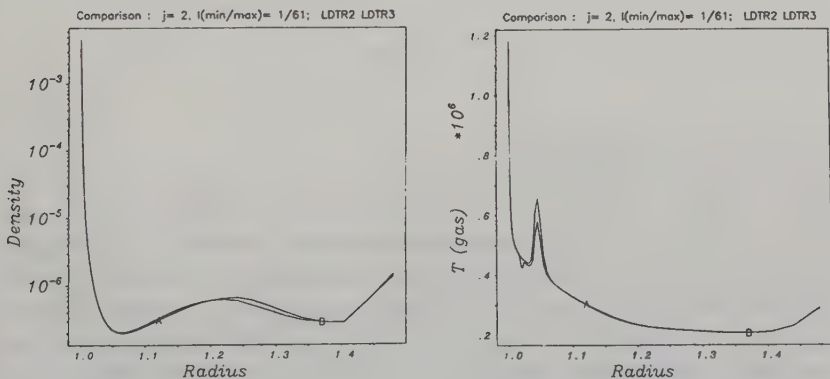


Abb. 7.35 Vergleich der Dichte- und Temperaturschichtung von den Modellen LDTR2 (A) und LDTR3 (B).

und LDTR3, die bis auf den Strahlungsdruck (vgl. Gl. 4.42) und den $\nabla \cdot (u \cdot P)$ -Term identisch sind, zeigt (Abb. 7.35), daß diese zusätzlichen Glieder dynamisch unwesentlich sind, denn sie haben keinerlei Einfluß auf die Dichte und Temperaturschichtung

(zumindest nicht innerhalb der Scheibe und Grenzschicht). Dieser Effekt ist zunächst überraschend, denn das Verhältnis β von Strahlungsdruck zu Gasdruck, hier näherungsweise durch

$$\beta = \frac{\lambda E}{p} \quad (7.5)$$

realisiert³⁵⁾, ist in manchen Gebieten deutlich größer als eins (Abb. 7.36). Wegen der starken Überschallströmung in diesem Bereich spielt allerdings ein Druckgradient kaum eine Rolle.

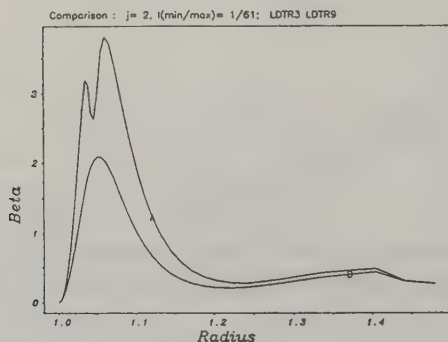


Abb. 7.36

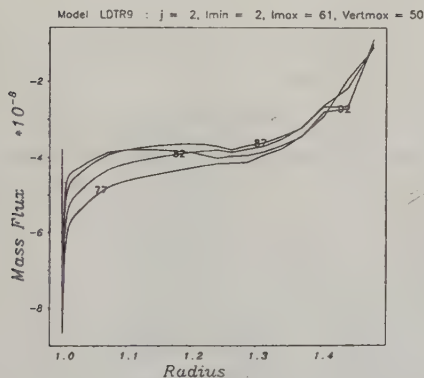
Vergleich des Strahlungsdrucks zwischen den Modellen LDTR3 und LDTR9.

- Massenfluß und vertikale Scheibendichte

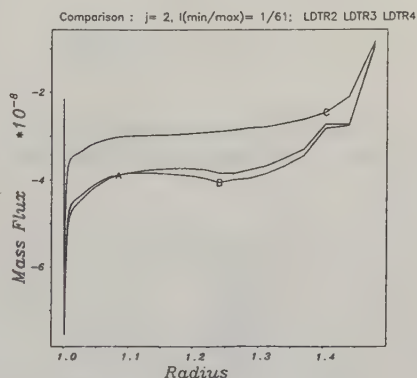
Im stationären Fall sollte der Massenfluß durch die Scheibe konstant sein. Abb. (7.37) zeigt auch einen näherungsweise konstanten Massenstrom in der Scheibe, wobei bis zu einem Winkel von $\alpha \approx 4^\circ$ aufsummiert wurde. Allerdings liegt dieser Wert (für Typ 2) mit $\dot{M} \approx 10^{-7} M_\odot/\text{yr}$ doch deutlich über der festen Einstromrate von etwa $3 \cdot 10^{-8} M_\odot/\text{yr}$. Ein stationärer Zustand kann dies strenggenommen also nicht sein, obwohl sich die Strukturen nur noch sehr wenig ändern. Bei Modellen vom Typ 1 ist die Diskrepanz dagegen nicht so groß (Abb. 7.38). Diese Problematik weist eventuell erneut auf eine nicht ganz konsistente äußere Randbedingung hin. Man könnte auch angesichts des weitgehend konstanten Bereichs argumentieren, daß die

³⁵⁾ Im optisch dicken Fall stimmt die Gl. (7.5) exakt, weil dann $\lambda = \text{const} = \frac{1}{3}$ gilt. Bei ortsabhängigem λ gilt die Gleichung dagegen nur näherungsweise.

Grenzschichtmodelle nicht zu einem $\dot{M} = 3 \cdot 10^{-8} M_{\odot}/yr$ gehören, sondern zu den entsprechenden höheren Werten korrespondieren. Die Werte liegen dann allerdings an der Obergrenze jener, die aus der Beobachtung abgeleitet wurden (vgl. Kap. 2.2.1). Hier wäre es günstig zu untersuchen, wie sich Modelle mit anderen $\dot{M}_{in}$ verhalten, was aber wegen der erwähnten langen Rechenzeit noch nicht erfolgt ist.



(7.37)



(7.38)

Abb. 7.37, 7.38 Der Massenfluß durch die Scheibe (bis $\alpha \approx 4^0$) für verschiedene Modelle

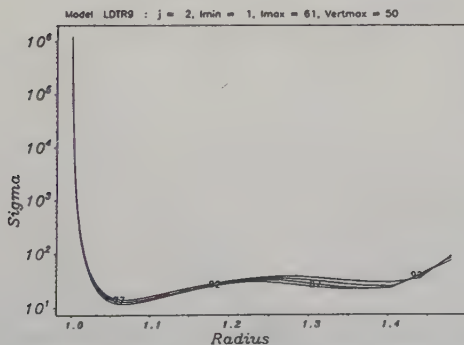


Abb. 7.39

Die Säulendichte der Scheibe (bis $\alpha \approx 4^0$ aufsummiert).

Die Graphen (Abb. 7.39) der vertikal integrierten Scheibendichte Σ (Gl. 2.1) entsprechen vollkommen dem Dichteverlauf (Abb. 7.35a) und stimmen im Scheibenbereich größenordnungsmäßig gut mit den Ergebnissen der Standardscheibentheorie überein (z.B. Meyer & Meyer-Hofmeister).

7.2.3 Der Grenzschichtbereich

In der Grenzschicht steigen z.B. Dichte und Strahlungsenergie wie schon erwähnt stark an. Dabei ist die vertikale Ausdehnung der BL deutlich größer als die radiale (Abb. 7.40), weil die vertikale Skalenhöhe (H_v) wegen der geringeren effektiven Gravitationsbeschleunigung um ein Vielfaches größer als die radiale (H_r) ist. Für das Verhältnis der Skalenhöhen direkt am Sternrand gilt

$$\frac{H_v}{H_r} = \sqrt{\frac{R T_{BL} R_*}{\mu G M_*}} = \left| \frac{c_s(T_{BL})}{u_K} \right|_{r=R_*} \approx 3 \cdot 10^{-2} \quad (7.6)$$

bei einer maximalen Grenzschichttemperatur von $T_{BL} = 1.2 \cdot 10^6$ K. Ein Wert, der gut durch die Rechnungen bestätigt wird, wie der Ausschnitt von Abb. (7.40) zeigt.

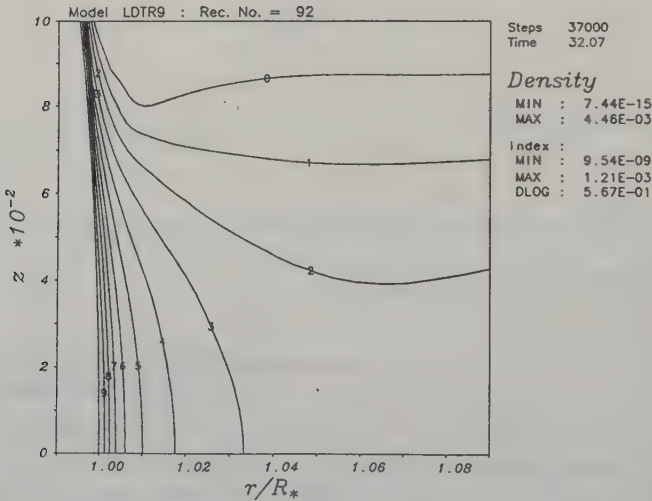


Abb. 7.40a Dichtekonturen im Grenzschichtbereich.

Deutlich ist wieder die dominante Energieabstrahlung der BL. Die Strukturen aller Modelle sind diesem als Beispiel gezeigten sehr ähnlich. Auf die Unterschiede in den Temperaturverläufen (rel. Maximum bei $r \approx 1.05$) ist bereits weiter oben ausführlich hingewiesen worden. Bezieht man sich nur auf die Dichte- und Energieschichtungen, so ist die Grenzschichtdicke wesentlich geringer als der Punkt, an dem die Ableitung von ω_φ verschwindet ($r \approx 1.12$), und auch kleiner als die Lage der Temperaturspitze. Der radiale Dichteverlauf im Zentrum der Scheibe zeigt erst ab Radien kleiner als

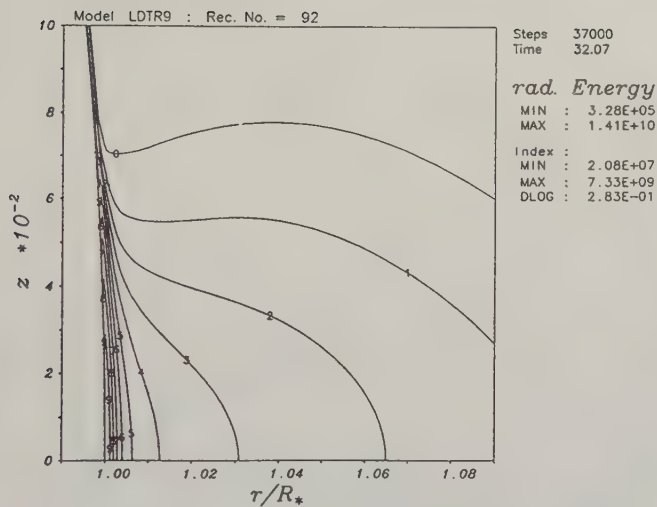


Abb. 7.40b Strahlungsenergiekonturen im Grenzschichtbereich.

$r \approx 1.005$ einen steilen Dichteanstieg (Abb. 7.41a). Bei Radien größer als 1.02 ist nähe-

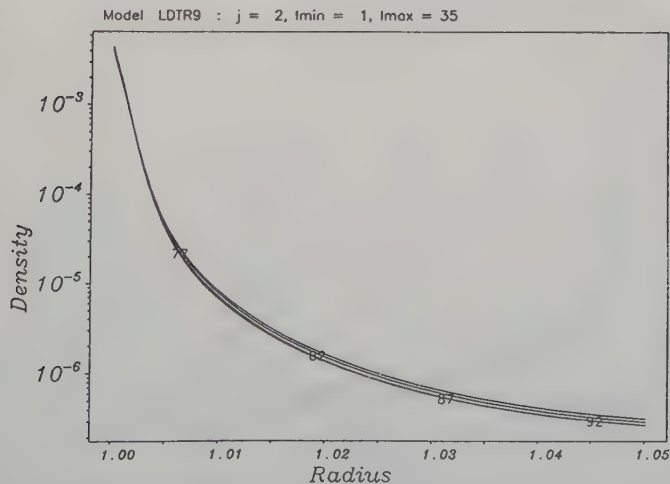


Abb. 7.41a Radialer Dichteverlauf in der Grenzschicht in Scheibenmitte.

rungsweise ein stationärer Zustand erreicht worden (die letzten beiden Kurven liegen übereinander). Eine weitere Vergrößerung (Abb. 7.41b) des inneren Bereichs

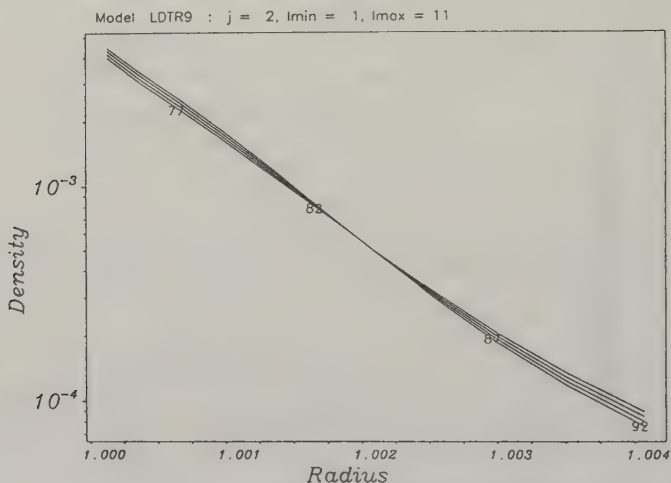


Abb. 7.41b Radialer Dichteverlauf in der Grenzschicht in Scheibenmitte (Vergrößerung von Abb. 7.41a).

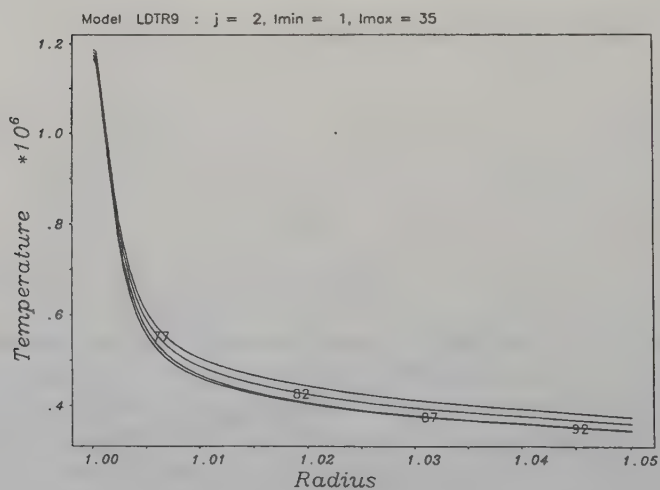


Abb. 7.42 Radialer Temperaturverlauf in der Grenzschicht in Scheibenmitte.

zeigt eine stetige langsame Akkumulation von Materie im Bereich $r \lesssim 1.002$ und eine leichte Verdünnung außerhalb davon (die Kurven überschneiden sich bei $r \approx 1.002$). Auch die Temperaturen (Abb. 7.42) steigen erst bei $r \approx 1.005$ steil an bis zu einem Maximalwert von etwa $1.2 \cdot 10^6$ K, der relativ unabhängig vom Modell ist.

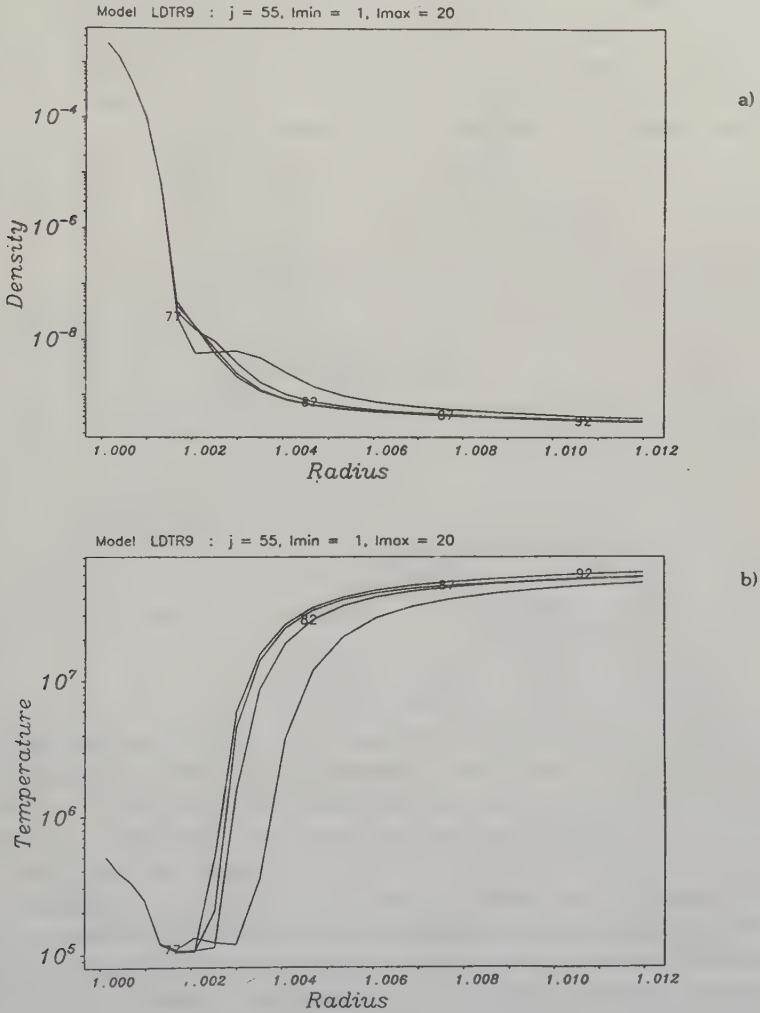
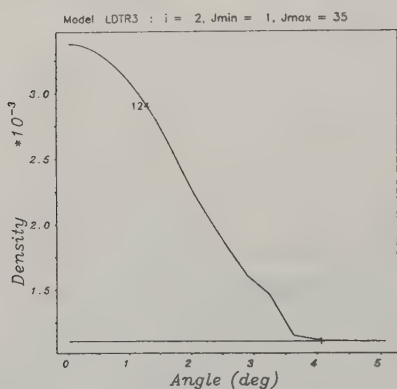
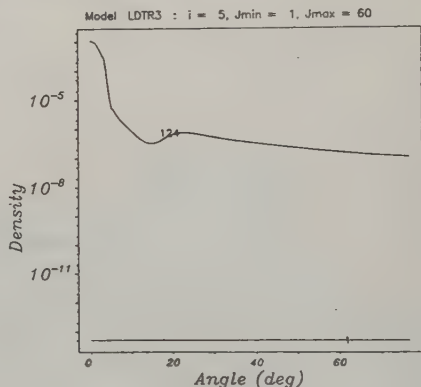


Abb. 7.43 Dichte (oben) und Temperaturschichtung (unten) der Sternatmosphäre bei einer stellaren Breite von ca. 47°

Als Kontrast dazu ist in Abb. (7.43) die radiale Dichte- und Temperaturverteilung bei einer stellaren Breite von etwa 47° , also weit oberhalb der Grenzschicht dargestellt. Die radiale Ausdehnung der Atmosphäre ist also geringer als jene der BL. Hier wird auch das oben erwähnte Problem der inkorrekten Temperatur in der Atmosphäre deutlich. Obwohl der Stern nur eine Effektivtemperatur von $1.5 \cdot 10^4 \text{ K}$ hat, ist die minimale Temperatur in der berechneten Schichtung ca. 10^5 K . Wie oben erläutert, ist diese Diskrepanz auf eine mangelnde Auflösung der steilen Gradienten mit nur wenigen Gitterzellen zurückzuführen³⁶⁾. Im Bereich der BL befinden sich allerdings genug Gitterzellen zur Auflösung der entstandenen Strukturen.



(7.44)



(7.45)

Abb. 7.44, 7.45 Meridionale Dichteabhängigkeit innerhalb der Sternatmosphäre (7.44) und an ihrem Außenrand (7.45).

Den obigen 3-D-Darstellungen der Dichte und Strahlungsenergie konnte man schon entnehmen, daß kein, oder nur sehr wenig Gas zu den Polen gelangt. Um dies zu quantifizieren, ist in Abb. (7.44) die vertikale Dichteschichtung direkt am Stern für den Anfangszustand und das letzte berechnete Modell aufgetragen. Die Dichte hat sich also für $\alpha \gtrsim 4^\circ$ nicht verändert. Mit anderen Worten, die Materie hat sich nicht weiter als bis zu einer stellaren Breite von 4° in Richtung Pol bewegt. Erst ab der 5. radialen Gitterzelle erkennt man (Abb. 7.45) einen deutlichen Dichteanstieg gegenüber dem Anfangsmodell, allerdings bei absoluten Dichten, die um mehr als 3 Größenordnungen geringer sind als vorher. Auch das Geschwindigkeitsfeld (Abb. 7.46) bestätigt den Befund: keinerlei "Drift" der Materie zum Pol. Um allerdings eine Bewe-

36) Bis zum Radius $r \approx 1.003$ gibt es genau 7 Gitterzellen, in denen sich die ganze Sternatmosphäre, also mehrere Skalenhöhen, befindet. Die Dichte fällt sogar schon innerhalb der ersten 4(!) Gitterzellen um 5 Größenordnungen ab.

gung zum Pol völlig ausschließen zu können, sind die realen Zeiten, die von der Rechnung überbrückt wurden, noch zu kurz.

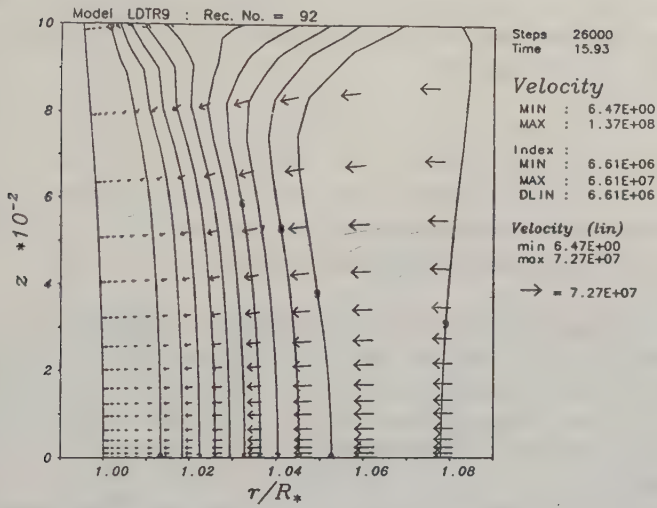


Abb. 7.46 Das Geschwindigkeitsfeld in der Grenzschicht.

7.3 Beobachtbare Konsequenzen

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt eingehend auf die Dichte und Temperaturschichtung eingegangen wurde, stellt sich nun die Frage, was denn nun zu beobachten ist. Die emittierten Photonen kommen aus einer Schicht mit der optischen Tiefe $\tau=1$, wobei für τ in diesem Fall

$$\tau(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} \rho(x+\sigma) dx' = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{I_P} dx' \quad (7.7)$$

gilt (vgl. Gl. 4.41). In Gl. (7.7) bezeichnet x die Länge entlang eines Sehstrahls mit dem Aufpunkt innerhalb der strahlenden Schicht. Die $\tau=1$ -Oberfläche in den Modellrechnungen wird nun näherungsweise wie folgt bestimmt :

a) Stern

Von einem äußeren Aufpunkt bei $r \approx r_{\max}$ (entspricht der oberen Grenze des Integrals in Gl. (7.7)) begonnen, wird in die negative radiale Richtung über die inverse freie Weglänge integriert, bis zu dem Radius, bei dem sich für das Integral der Wert eins ergibt. Man geht also von außen senkrecht in die Atmosphäre hinein bis zum Punkt $\tau=1$.

b) Scheibe

Wegen der Problematik von Interpolationen verläuft hier der Sehstrahl entlang eines konstanten Gitter-Radius. Ganz analog wie vorher wird nun von $\alpha \approx 60^\circ$ in Richtung zur Scheibe aufintegriert bis das Integral den Wert eins erreicht. Da die Dichte oberhalb der Scheibe sehr gering ist, hat die Krümmung des Sehstrahls keinen Einfluß auf das Ergebnis.

In beiden Fällen wird also im Prinzip die $\tau=1$ -Fläche bei annähernd senkrechter Blickrichtung auf die strahlende Fläche bestimmt. Die Integrale werden numerisch mit der Simpson-Methode berechnet. .

In Abb. (7.47a) ist nun die so bestimmte Höhe der Scheibenoberfläche über der Äquatorebene gegen den Abstand aufgetragen und in Abb. (7.47b) die Höhe (über $r_{\min}=1=R_*$) der Sternatmosphäre gegen den Winkel. Bei kleinen Radien (bzw. Winkeln) steigen die Höhen stark an, weil die jeweils andere Komponente (Stern, bzw. Scheibe) stört, und sozusagen keine "freie Sicht" mehr zuläßt. Die Scheibendicke nimmt, angefangen von einem Minimalwert bei $r \approx 1.05$ (dem Maximum der radialen Einfallgeschwindigkeit), mit einem Öffnungswinkel von ca. 6.5° stetig zu. Die Höhe der Sternatmosphäre variiert nur leicht und steigt von einem Minimalwert bei $\alpha \approx 10^\circ$ (dort preßt ankommendes Scheibengas die Atmosphäre zusammen, vgl. Abb. 7.14, 7.46) auf die ungestörte Höhe von etwa $1.67 \cdot 10^{-3} R_*$ an.

Die freigesetzte Strahlung an dieser Oberfläche ist vor allem durch die dortigen Temperaturen bestimmt. Die Gas- (T_{gas}) und die Strahlungstemperatur

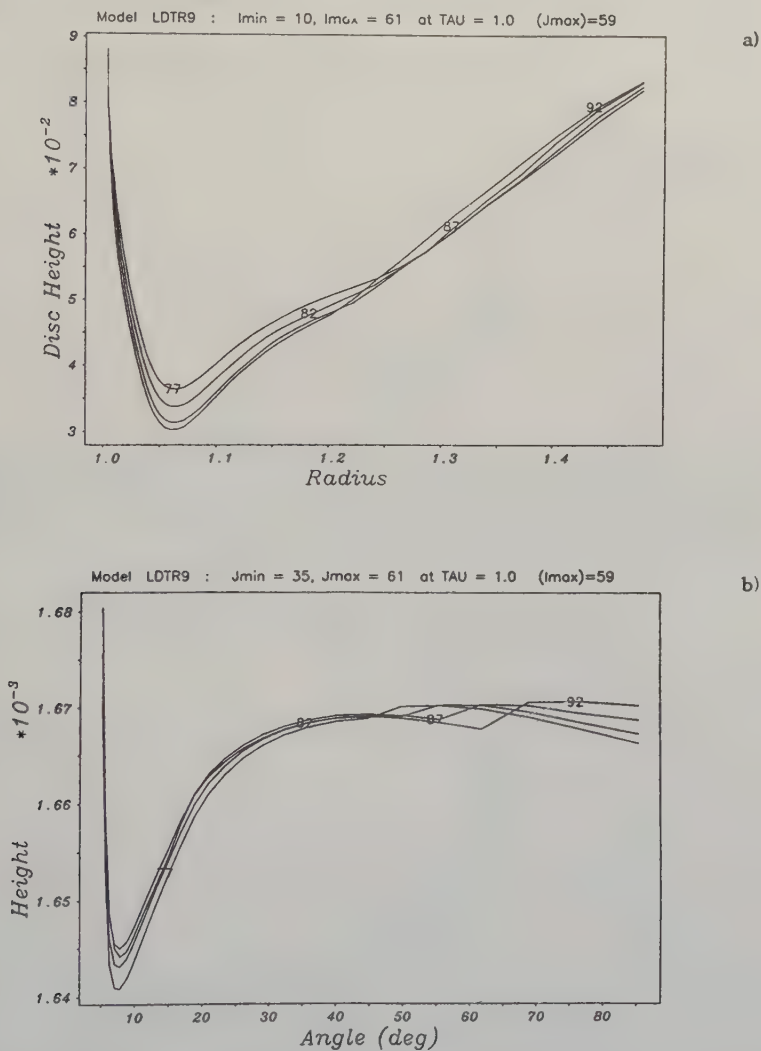


Abb. 7.47a,b Die $\tau=1$ -Höhen der Scheibe (oben) und der Sternatmosphäre (über der Sternoberfläche, unten).

$$T_{\text{rad}} = \sqrt[4]{\frac{E}{a}}, \quad (7.8)$$

mit $a = 4\sigma/c$, haben in der Scheibenoberfläche den in Abb. (7.48) gezeigten Verlauf. In

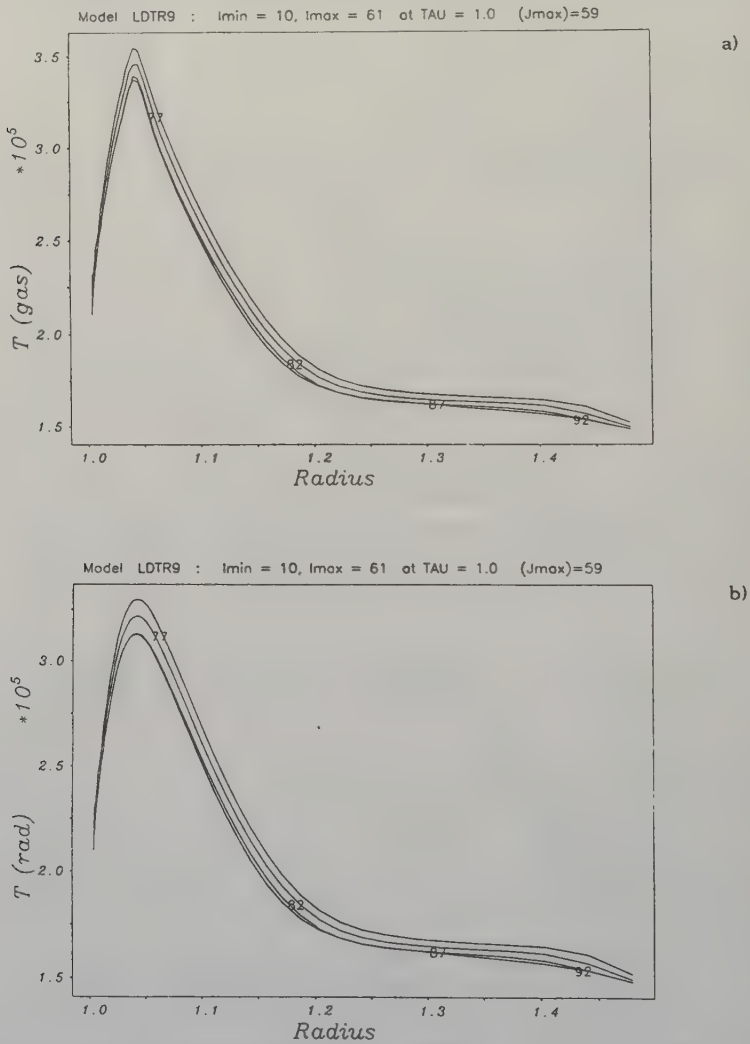


Abb. 7.48 Radiale Abhängigkeit der Oberflächentemperaturen (T_{gas} (a) und T_{rad} (b)) der Scheibe.

den äußeren Teilen ab $r \approx 1.1$ gilt in guter Näherung $T_{\text{gas}} = T_{\text{rad}}$, also thermodynamisches Gleichgewicht. Bei maximaler Dissipation ($r \approx 1.05$) ist $T_{\text{gas}} > T_{\text{rad}}$, und es kann sich dort kein Gleichgewicht einstellen. An der Sternoberfläche gilt dagegen überall $T_{\text{gas}} = T_{\text{rad}}$, und exemplarisch ist in Abb. (7.49) die Strahlungstemperatur dargestellt.

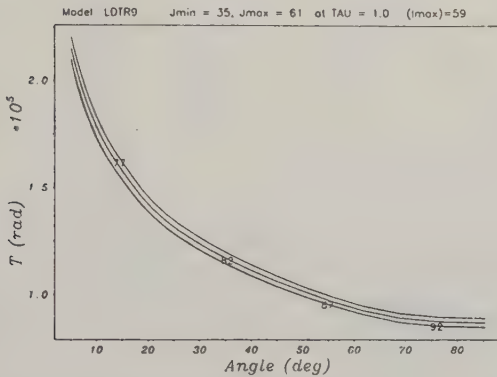


Abb. 7.49

Die Strahlungstemperatur an der Sternoberfläche in Abhängigkeit von der stellaren Breite.

Setzt man die beiden Teile (Stern & Scheibe) zusammen, so erhält man bis auf eine kleine Lücke (wegen der oben erwähnten Abschattung) einen kontinuierlichen Temperaturverlauf (Abb. 7.50a) bei den in Abb. (7.50b) aufgetragenen $\tau=1$ -Konturen.

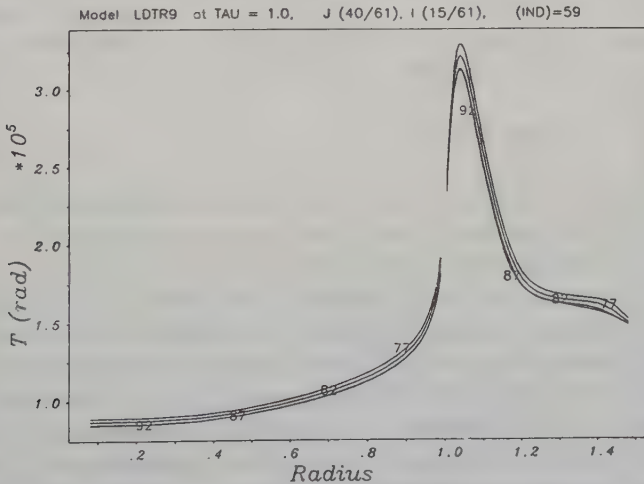


Abb. 7.50a Der Temperaturverlauf bei den $\tau=1$ -Konturen.

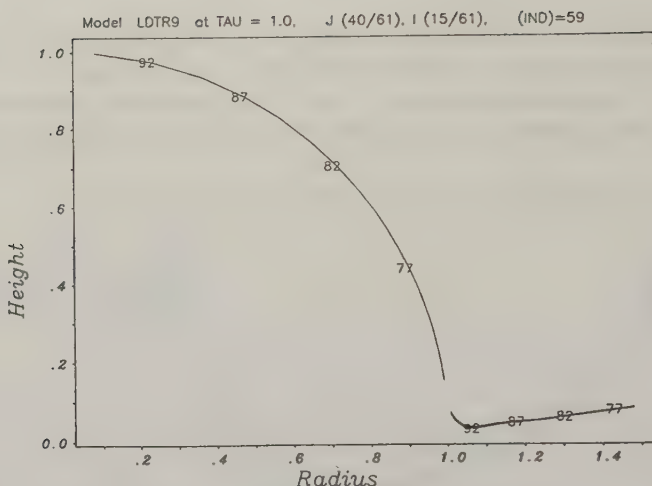


Abb. 7.50b Die Höhe der $\tau=1$ -Oberfläche über dem Äquator.

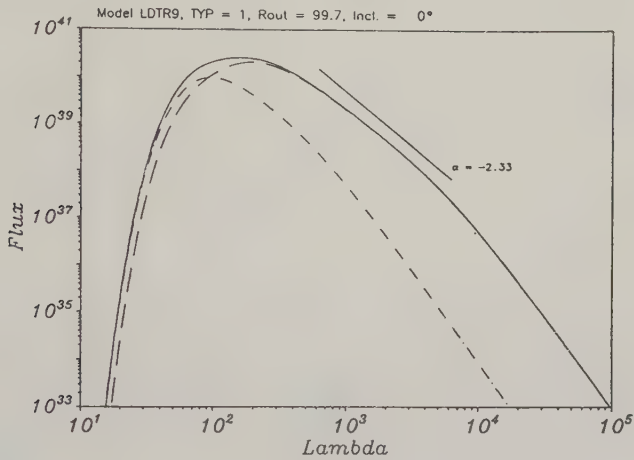
Zur Berechnung eines theoretischen Spektrums wird die Lücke durch lineare Interpolation überbrückt und außen (an $r_{\max}$ anschließend) die Temperaturverteilung der Standardscheibe (s. Gl. 2.6) ergänzt. Die zugehörige Scheibenhöhe wird nach Meyer & Meyer-Hofmeister berechnet. Wie bei der Berechnung des Spektrums der Standardscheibe werden nun die lokalen Planck-Verteilungen bei der Temperaturabhängigkeit $T = T(r, z)$ mit der entsprechenden sichtbaren Fläche gewichtet und aufsummiert. Dabei wird eine Randverdunklung gemäß

$$E(\vartheta) = \frac{1 + \xi \cos \vartheta}{1 + \xi} E(0) \quad (7.9)$$

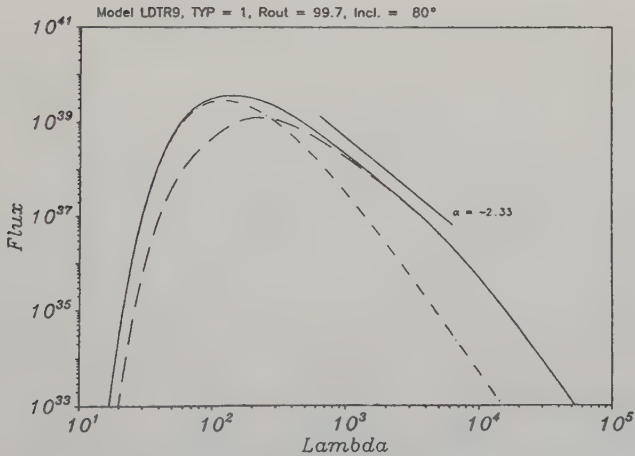
mit dem Randverdunklungskoeffizienten $\xi=1.5$ und auch eine mögliche Bedeckung der Scheibe durch den Stern bei höheren Inklinationen konsistent mitberücksichtigt.

Abb. (7.51) zeigt die Flußverteilung für ein Modell mit rotierendem Stern für zwei verschiedene Inklinationen ($i=0^\circ, 80^\circ$). Zusätzlich ist eine Gerade mit der Steigung $\alpha = -2.33$ eingezeichnet, die asymptotisch aus der Standardscheibentheorie unter der Bedingung einer großen Scheibe folgt. In diesem Fall liegt der äußere Scheibenrand bei $r=100R_\star$, einem typischen Wert in CVs. Man erkennt, daß die Flußverteilung der Scheibe allein (---) im IUE-Bereich (1200–3200 Å) einen etwas geringeren Abfall als $\alpha = -2.33$ hat, weil das Verhältnis von Innen- zu Außenrand mit 100 noch zu klein ist. In CVs sollte man demnach nicht unbedingt einen $\alpha = -2.33$ -Abfall von F_λ beobachten. Bei größeren Inklinationen hilft hier nun die BL etwas aus, weil die Scheibe nur von der Kante zu sehen ist, und der Beitrag der BL relativ zunimmt. Dies führt

zu einem steileren Abfall des Flusses mit der Wellenlänge.



a)



b)

Abb. 7.51 Theoretisches Schwarzkörperspektrum für ein Modell mit rotierendem Stern bei zwei verschiedenen Inklinationen (" - - - " = Scheibe, "-.-.-" = BL, "— " = Summe).

Bei nicht-rotierendem Stern wird dieser Effekt noch leicht verstärkt wegen der höheren Temperaturen (Abb. 7.52).

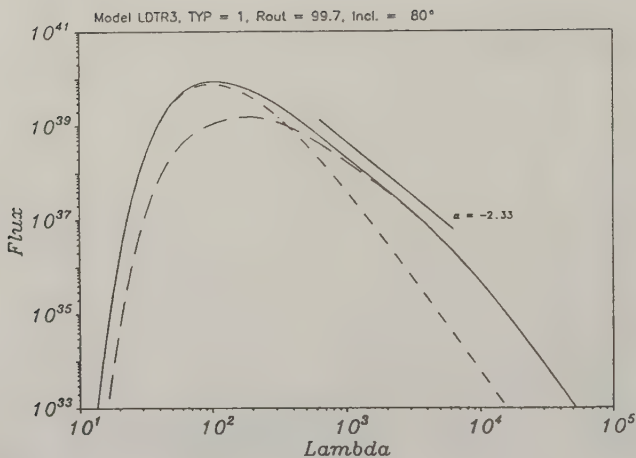


Abb. 7.52 Wie Abb. (7.51b), nur mit nicht-rotierendem Stern.

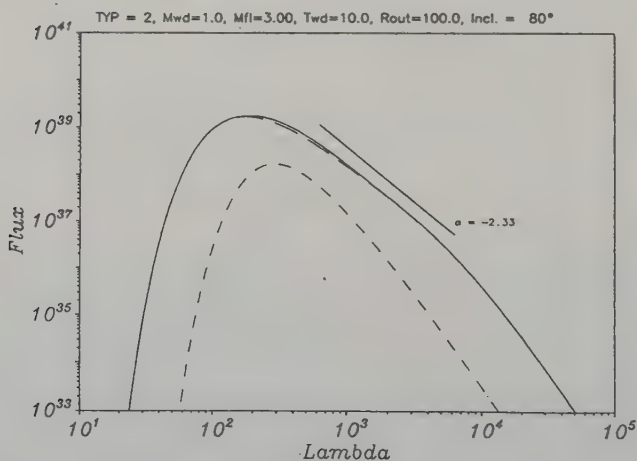


Abb. 7.53 Theoretisches Scheibenspektrum einer Standardakkretionsscheibe und einem Weißen Zwerg anstelle der BL.

Als Vergleich wurde noch ein theoretisches Schwarzkörperspektrum berechnet, wobei die BL durch einen einfachen Weißen Zwerg mit $T_{WD} = 10^5 K$ (!) ersetzt wurde.

Der Stern hat trotz seiner hohen Effektivtemperatur keinerlei Einfluß auf die Flußverteilung. Es führt also praktisch **nur** die Mitberücksichtigung der BL zu einer Flußverteilung, die im Bereich $800\text{--}1300\text{ \AA}$ näherungsweise einem $F_\lambda \sim \lambda^{-2.33}$ Gesetz genügt.

Das emittierte reale Spektrum ist aber bei weitem kein Schwarzkörperspektrum. Die Beobachtungen im FUV (s. Abschnitt 3.2.3) zeigen z.B. starke Blanketing-Effekte. Die berechneten Spektren können aber eventuell eine qualitative Abschätzung der zu erwarteten Einflüsse geben.

8 Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine zweidimensionale numerische Methode zur Lösung der hydrodynamischen Gleichungen einschließlich Viskosität und Strahlungstransport, in der Flux-Limited Diffusion Näherung, entwickelt.

Die Rechnungen haben es zum **ersten Mal** ermöglicht, die Struktur der Grenzschicht der Akkretionsscheibe in CVs **konsistent zweidimensional** zu berechnen. Die Ergebnisse und auch einige Problemfelder der Rechnungen sind im vorangegangenen Kapitel ausführlich diskutiert worden. Bei weitergehenden Untersuchungen bedürfen nun vor allem die folgenden Punkte einer Verbesserung.

- Es kann angenommen werden, daß die Gasströmung und Schichtung in der Scheibe und Grenzschicht im wesentlichen korrekt beschrieben werden. Im äußeren optisch dünnen Teil spielt jedoch der Strahlungsdruck in den Linien (s. stellare Winde) eine wesentliche Rolle bei der Bestimmung des Strömungsfeldes. Hier sollte eine, zumindest näherungsweise, Abschätzung der **Linienkraft** miteinbezogen werden.
- Um die Temperaturschichtung zu verbessern, sind genauere **Opazitäten** (ggf. aus Tabellen) notwendig. Hierzu gehört auch eine verbesserte **Quellfunktion** bzw. Kühlungs- und Heizungsrate (s. Gl. 4.47), die vor allem den Übergang von optisch dickem Bereich zu optisch dünnem, aus dem die emittierte Strahlung kommt, korrekt wiedergibt. Die LTE-Näherung auch im optisch dünnen Bereich sollte fallengelassen werden, obwohl dies wegen der, im Vergleich zu den Rechenzeiten, langen Zeitskalen nicht so entscheidend ist.
- Die Viskosität spielt ebenfalls im optisch dünnen Bereich eine dominierende Rolle (z.B. bei Erzeugung der heißen Korona durch Dissipation) und bestimmt auch im optisch dicken Bereich die Skalenlängen (vgl. Gl. 7.2). Hier gilt es andere Parametrisierungen zu untersuchen, um die Abhängigkeit der Modelle von der Beschreibung der **Viskosität** herauszustellen. Z.B. wäre eine Viskosität von der Art

$$\nu = c_s \frac{P}{|\nabla p|} \quad (8.1)$$

denkbar, bei der die Turbulenzlänge durch die Druckskalenhöhe gegeben ist.

- Weiterhin sollte eine mögliche Mischung von Scheiben- und Sternmaterie genauer untersucht werden, um Aufschluß über die beobachtete Anreicherung der Nova-Hüllen mit schweren Elementen zu gewinnen. Dazu sollte eine räumlich variierende chemische Zusammensetzung im Programm mit berücksichtigt werden.

- Schließlich sollten die erwähnten Probleme der äußeren **Randbedingung** abgeklärt und auch die Gitterauflösung in der Sternatmosphäre am inneren Rand erhöht werden, um eine korrekte Temperaturschichtung der Atmosphäre zu ermöglichen. Auf numerischer Seite ist eine Reduzierung der Rechenzeit durch **effizientere Algorithmen** wünschenswert.

Aufbauend auf einer so konsistent berechneten Struktur der Grenzschicht sollte es möglich sein, eine exakte Lösung der Transportgleichung zur Berechnung eines **Linienpektrums** durchzuführen, um einen detaillierten Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung (z.B. der Voyager-Spektren im FUV, oder den Röntgen-Spektren des zukünftigen ROSAT) zu ermöglichen.

Anhang

A1 Die Dissipationsfunktion in Kugelkoordinaten

Wie in Kley (1985) gezeigt wurde, läßt sich die Dissipationsfunktion $\Phi = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}$ schreiben als

$$\Phi = 2 \eta \left(2 \operatorname{Sp}(\mathbf{D}^2) - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right), \quad (\text{A1.1})$$

wobei

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

der Deformationstensor ist. Mit der Definition

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \eta \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right)$$

folgt dann für die Dissipationsfunktion

$$\Phi = \frac{1}{2\eta} \operatorname{Sp}(\boldsymbol{\tau}^2) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{1}{2} (\tau_{rr}^2 + \tau_{\alpha\alpha}^2 + \tau_{\varphi\varphi}^2) + \tau_{r\alpha}^2 + \tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\alpha\varphi}^2 \right)$$

(s.a. Mihalas & Mihalas, 1984, Kap. 3). Das Einsetzen der Tensorkomponenten nach Gl. (4.45) und Zusammenfassen liefert dann im Koordinatensystem (r, α, φ)

$$\begin{aligned} \Phi = \eta \left\{ \frac{2}{9} \left[\left(2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) - \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \tan \alpha g \right)^2 \right. \right. \\ + \left(- \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + 2 \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \tan \alpha g \right)^2 \\ + \left. \left(- \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) - \frac{\partial g}{\partial \alpha} - 2 \tan \alpha g \right)^2 \right] \\ + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial r} \right)^2 + \left(r \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial r} \right)^2 + \left(\cos \alpha \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A1.2})$$

A2 Gitterskalierung

Am Sternrand und in der Äquatorebene ist eine höhere räumliche Auflösung, d.h. eine feinere Maschenweite des Rechengitters notwendig. Weil eine sprunghafte Änderung der Gitterabstände numerische Instabilitäten hervorrufen kann, sollten sich die Abstände möglichst kontinuierlich verändern. Am einfachsten ist die konstante Vergrößerung (bzw. Verkleinerung) des Gitters, also

$$x_i - x_{i-1} = K (x_{i+1} - x_i), \quad (\text{A2.1})$$

wobei x_i den i -ten Gitterpunkt entlang der x -Koordinate bezeichne, und K eine Konstante ist. Unter Vorgabe der Ausdehnung des gesamten Rechenbereichs und der kleinsten Gitterzelle soll die Skalierungskonstante K berechnet werden.

Die Anzahl der Gitterzellen sei NX , und der kleinste x -Wert sei mit x_1 und der größte mit x_{NX+1} bezeichnet. Für die Differenzen

$$D_i := x_i - x_{i-1}$$

gilt dann

$$D_i = K D_{i-1} = K^2 D_{i-2} = \dots = K^{i-2} D_2.$$

D_2 sei nun die fest vorgegebene Größe der kleinsten (größten) Gitterzelle. Die Summe aller Zellen muß genau den Gesamtbereich ergeben

$$\sum_{i=2}^{NX+1} D_i = D_2 \sum_{i=0}^{NX-1} K^i \stackrel{!}{=} x_{\max} - x_{\min}. \quad (\text{A2.2})$$

Mit

$$f := \frac{x_{\max} - x_{\min}}{D_2} = \sum_{i=0}^{NX-1} K^i = \frac{K^{NX-1} - 1}{K - 1}$$

läßt sich der Skalierungsfaktor K dann aus der algebraischen Gleichung

$$K^{NX-1} - K f + f - 1 = 0 \quad (\text{A2.3})$$

berechnen. Unter Verwendung des Newtonverfahrens erhält man K iterativ aus

$$K_{n+1} = K_n - \frac{K_n^{NX-1} - K_n^f + f - 1}{(NX - 1) K_n^{NX-2} - f} . \quad (A2.4)$$

Als Anfangswert K_0 wird entweder 1.1 bei Vergrößerung oder 0.9 bei Verkleinerung gewählt.

A3 Die Matricelemente bei der Drehimpulsdiffusion

Durch Sortieren der Terme in der FDG für den viskosen Drehimpulstransport (Gl. S.11) erhält man das folgende lineare Gleichungssystem (s.a. Gl. S.12)

$$A h_{i-1,j}^{n+1} + C h_{i+1,j}^{n+1} + D h_{i,j-1}^{n+1} + E h_{i,j+1}^{n+1} + (I + B^r + B^\alpha) h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n. \quad (A3.1)$$

Die Matricelemente $A, C, \dots, B^\alpha$ sind dabei folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \frac{\Delta t}{\rho_{i,j} (r_i^b)^2} \frac{3 (r_i^a)^4 \bar{\eta}_{i,j}^r}{(r_i^b - r_{i-1}^b) [(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3]} \\ C_{i,j} &= \frac{\Delta t}{\rho_{i,j} (r_i^b)^2} \frac{3 (r_{i+1}^a)^4 \bar{\eta}_{i+1,j}^r}{(r_{i+1}^b - r_i^b) [(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3]} \\ B_{i,j}^r &= - (A_{i,j} + C_{i,j}) \\ D_{i,j} &= \frac{\Delta t}{\rho_{i,j} (r_i^b)^2 \cos^2 \alpha_j^b} \frac{\cos^3 \alpha_j^a \bar{\eta}_{i,j}^\alpha}{(\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b) (\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a)} \\ E_{i,j} &= \frac{\Delta t}{\rho_{i,j} (r_i^b)^2 \cos^2 \alpha_j^b} \frac{\cos^3 \alpha_{j+1}^a \bar{\eta}_{i,j+1}^\alpha}{(\alpha_{j+1}^b - \alpha_j^b) (\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a)} \\ B_{i,j}^\alpha &= - (D_{i,j} + E_{i,j}). \end{aligned} \quad (A3.2)$$

In Gl. (A3.2) gehören die Koeffizienten mit den Indizes (i,j) zur entsprechenden Gleichung von (A3.1) (mit $h_{i,j}^n$ auf der rechten Seite). $\bar{\eta}_{i,j}^r$ bzw. $\bar{\eta}_{i,j}^\alpha$ bezeichnen die interpolierten Werte der dynamischen Viskosität am Gitterpunkt (r_i^a, α_j^b) bzw. (r_i^b, α_j^a) , also

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{i,j}^r &= \eta(r_i^a, \alpha_j^b) \\ \bar{\eta}_{i,j}^\alpha &= \eta(r_i^b, \alpha_j^a). \end{aligned} \quad (A3.3)$$

Bei linearer Interpolation gilt z.B.

$$\bar{\eta}_{i,j}^r = \frac{\eta_{i,j} (r_i^a - r_{i-1}^b) + \eta_{i-1,j} (r_i^b - r_i^a)}{r_i^b - r_{i-1}^b} \quad (A3.4)$$

und die analoge Relation für $\bar{\eta}_{i,j}^\alpha$.

A4 Die Matricelemente bei der Diffusion des poloidalen Impulses

Setzt man die Komponenten des Impulstensors in sphärischen Polarkoordinaten (s. Gl. 4.45 und Gl. 5.16b) in die Differentialgleichungen für den viskosen Transport des poloidalen Impulses (Gl. 5.14, 5.15) ein, so erhält man das folgende Gleichungssystem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r^3} \left[\eta r^3 \left(2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial \sin \alpha} (\cos \alpha g) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \sin \alpha} \left[\eta \cos \alpha \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial r} \right) \right] \right\} \quad (\text{A4.1})$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{r^2 \rho} \left\{ 3 \frac{\partial}{\partial r^3} \left[\eta r^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) \right] + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\eta \left(2 \frac{\partial}{\partial \sin \alpha} (\cos \alpha g) - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right) \right] + 2g \left(\tan \alpha \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \eta \right) \right\}. \quad (\text{A4.2})$$

Der letzte Term in der zweiten Gleichung kann noch zusammengefaßt werden zu

$$\tan \alpha \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \eta = \frac{\partial}{\partial \sin \alpha} (\sin \alpha \eta).$$

Das Umformen des obigen Gleichungssystems (A4.1) in ein System von FDG (vgl. dazu die Def. der Variablen, Abb. 5.1) und Zusammenfassen der Terme führt zu

$$\begin{aligned} AVR v_{i-1,j} + CVR v_{i+1,j} + AVA v_{i,j-1} + CVA v_{i,j+1} + BV v_{i,j} \\ + DV g_{i-1,j} + EV g_{i,j} + FV g_{i-1,j+1} + GV g_{i,j+1} = v_{i,j}^n \end{aligned} \quad (\text{A4.3})$$

$$\begin{aligned} AGR g_{i-1,j} + CGR g_{i+1,j} + AGA g_{i,j-1} + CGA g_{i,j+1} + BG g_{i,j} \\ + DG v_{i,j-1} + EG v_{i,j} + FG v_{i+1,j-1} + GG v_{i+1,j} = g_{i,j}^n. \end{aligned} \quad (\text{A4.4})$$

Dabei sind die Geschwindigkeiten auf der linken Seite zum Zeitpunkt t^{n+1} zu nehmen. Bis auf die Bezeichnungen der Matricelemente **AVR** bis **GG**, bei denen wieder die Indizes zur Klarheit unterdrückt wurden, sind die Gleichungen identisch mit den schon in Kap. 5 angegebenen (Gl. 5.18). Im einzelnen lauten die Matricelemente nun für die radiale Impulsleichung

$$AVR_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^r} \left\{ \frac{4 \eta_{i-1,j} (r_{i-1}^b)^4}{r_i^a r_{i-1}^a (r_i^a - r_{i-1}^a) [(r_i^b)^3 - (r_{i-1}^b)^3]} \right\}$$

$$CVR_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^r} \left\{ \frac{4 \eta_{i,j} (r_i^b)^4}{r_i^a r_{i+1}^a (r_{i+1}^a - r_i^a) [(r_i^b)^3 - (r_{i-1}^b)^3]} \right\}$$

$$AVA_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^r} \left\{ \frac{\tilde{\eta}_{i,j} \cos \alpha_j^a}{(r_i^a)^2 (\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b) (\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a)} \right\}$$

$$CVA_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^r} \left\{ \frac{\tilde{\eta}_{i,j+1} \cos \alpha_{j+1}^a}{(r_i^a)^2 (\alpha_{j+1}^b - \alpha_j^b) (\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a)} \right\}$$

$$BV_{i,j} = 1 - \frac{1}{r_i^a} (CVR_{i,j} \cdot r_{i+1}^a + AVR_{i,j} \cdot r_{i-1}^a) - (AVA_{i,j} + CVA_{i,j}) \quad (A4.5)$$

$$DV_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^r} \frac{1}{(\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a)} \left\{ - \frac{2 \eta_{i-1,j} \cos \alpha_j^a (r_{i-1}^b)^3}{r_i^a [(r_i^b)^3 - (r_{i-1}^b)^3]} + \frac{\tilde{\eta}_{i,j} \cos \alpha_j^a}{(r_i^b - r_{i-1}^b)} \right\}$$

$$EV_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^r} \frac{1}{(\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a)} \left\{ \frac{2 \eta_{i,j} \cos \alpha_j^a (r_i^b)^3}{r_i^a [(r_i^b)^3 - (r_{i-1}^b)^3]} - \frac{\tilde{\eta}_{i,j} \cos \alpha_j^a}{(r_i^b - r_{i-1}^b)} \right\}$$

$$FV_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^r} \frac{1}{(\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a)} \left\{ \frac{2 \eta_{i-1,j} \cos \alpha_{j+1}^a (r_{i-1}^b)^3}{r_i^a [(r_i^b)^3 - (r_{i-1}^b)^3]} - \frac{\tilde{\eta}_{i,j+1} \cos \alpha_{j+1}^a}{(r_i^b - r_{i-1}^b)} \right\}$$

$$GV_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^r} \frac{1}{(\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a)} \left\{ - \frac{2 \eta_{i,j} \cos \alpha_{j+1}^a (r_i^b)^3}{r_i^a [(r_i^b)^3 - (r_{i-1}^b)^3]} + \frac{\tilde{\eta}_{i,j+1} \cos \alpha_{j+1}^a}{(r_i^b - r_{i-1}^b)} \right\}$$

Für die meridionale Komponente ergibt sich

$$AGA_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^\alpha} \left\{ \frac{4 \eta_{i,j-1} \cos \alpha_{j-1}^a}{3 (r_i^b)^2 (\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b) (\sin \alpha_j^a - \sin \alpha_{j-1}^a)} \right\}$$

$$CGA_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^\alpha} \left\{ \frac{4 \eta_{i,j} \cos \alpha_{j+1}^a}{3 (r_i^b)^2 (\alpha_j^b - \alpha_{j+1}^b) (\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a)} \right\}$$

$$AGR_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^\alpha} \left\{ \frac{3 \tilde{\eta}_{i,j} (r_i^a)^4}{(r_i^b)^2 (r_i^b - r_{i-1}^b) [(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3]} \right\}$$

$$CGR_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^\alpha} \left\{ \frac{3 \tilde{\eta}_{i+1,j} (r_{i+1}^a)^4}{(r_i^b)^2 (r_{i+1}^b - r_i^b) [(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3]} \right\}$$

$$BG_{i,j} = 1 - \cos \alpha_j^a \left(\frac{AGA_{i,j}}{\cos \alpha_{j-1}^a} + \frac{CGA_{i,j}}{\cos \alpha_{j+1}^a} \right) - (AGR_{i,j} + CGR_{i,j})$$

$$+ \frac{2}{(r_i^b)^2} \left(\tan \alpha_j^a \frac{\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}}{\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b} + \tilde{\eta}_{i,j}^\alpha \right) \quad (A4.6)$$

$$DG_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^\alpha} \frac{1}{(r_i^b)^2 (\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b)} \left\{ - \frac{2 \eta_{i,j-1} r_i^b}{3 r_i^a (r_{i+1}^a - r_i^a)} + \frac{3 \tilde{\eta}_{i,j} (r_i^a)^2}{[(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3]} \right\}$$

$$EG_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^\alpha} \frac{1}{(r_i^b)^2 (\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b)} \left\{ \frac{2 \eta_{i,j} r_i^b}{3 r_i^a (r_{i+1}^a - r_i^a)} - \frac{3 \tilde{\eta}_{i,j} (r_i^a)^2}{[(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3]} \right\}$$

$$FG_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^\alpha} \frac{1}{(r_i^b)^2 (\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b)} \left\{ \frac{2 \eta_{i,j-1} r_i^b}{3 r_{i+1}^a (r_{i+1}^a - r_i^a)} - \frac{3 \tilde{\eta}_{i+1,j} (r_{i+1}^a)^2}{[(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3]} \right\}$$

$$GG_{i,j} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{i,j}^\alpha} \frac{1}{(r_i^b)^2 (\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b)} \left\{ - \frac{2 \eta_{i,j} r_i^b}{3 r_{i+1}^a (r_{i+1}^a - r_i^a)} + \frac{3 \tilde{\eta}_{i+1,j} (r_{i+1}^a)^2}{[(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3]} \right\}$$

In Gl. (A4.5) und (A4.6) bezeichnen $\bar{\rho}_{i,j}^r$ und $\bar{\rho}_{i,j}^\alpha$ die interpolierten Werte von ρ an den Gitterpunkten (r_i^a, α_j^b) bzw. (r_i^b, α_j^a) , d.h. an den Stellen an denen die entsprechenden Geschwindigkeiten definiert sind. Im folgenden seien alle "gequerten" Größen an diesen Punkten definiert. Die Differenzengleichung ist durch (A3.4) gegeben. $\tilde{\eta}_{i,j}$ bezeichnet dagegen den Wert der dynamischen Viskosität an den Schnittpunkten des a-Gitters (r_i^a, α_j^a) . Die entsprechende Differenzengleichung lautet (s.a. Gl. A3.4)

$$\tilde{\eta}_{i,j} = \frac{\bar{\eta}_{i,j}^\alpha (r_i^a - r_{i-1}^b) + \bar{\eta}_{i-1,j}^\alpha (r_i^b - r_i^a)}{r_i^b - r_{i-1}^b} . \quad (\text{A4.7})$$

Alle "geschlängelten" Größen in den Differenzengleichungen sind an diesen Schnittpunkten definiert.

A5 Die Differenzengleichungen des radiativen Teils bei der vollständigen Linearisierung

Die zwei Differentialgleichungen dieses Abschnitts seien nochmals angegeben (s.a. Gl. 5.25, 5.26)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \tilde{\Lambda}(E, T) \quad (\text{A5.1})$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\rho}{(\gamma-1)} \cdot \tilde{\Lambda}(E, T) + f_d \nabla \cdot \left(\frac{\lambda}{\rho(x+\sigma)} \nabla E \right) - \nabla \cdot (E \mathbf{u} \tau_{\text{edd}}) .$$

Die Diskretisierung führt dann zu folgenden Differenzengleichungen

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \Delta t \tilde{\Lambda}(T_{i,j}^{n+1}, E_{i,j}^{n+1}) \quad (\text{A5.2})$$

$$E_{i,j}^{n+1} = E_{i,j}^n + \Delta t \left\{ - \frac{\rho_{i,j}}{\gamma-1} \tilde{\Lambda}(T_{i,j}^{n+1}, E_{i,j}^{n+1}) + B_{i,j} E_{i,j}^{n+1} \right. \quad (\text{A5.3})$$

$$\left. + A_{i,j} E_{i-1,j}^{n+1} + C_{i,j} E_{i+1,j}^{n+1} + D_{i,j} E_{i,j-1}^{n+1} + E_{i,j} E_{i,j+1}^{n+1} \right\} ,$$

wobei die Koeffizienten $A_{i,j}$ bis $E_{i,j}$ aus dem Diffusionsteil und dem $\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P})$ -Term zusammengesetzt sind (z.B. $A_{i,j} = A_{i,j}^d + A_{i,j}^p$ usw.). Die expliziten Ausdrücke sind in den nachfolgenden Absätzen angegeben, wobei statt $\tilde{\Lambda}$ immer einfach Λ geschrieben wird. Eine Taylorentwicklung um $T_{i,j}^{n+1}, E_{i,j}^{n+1}$ (s.a. Gl. 5.30) liefert

$$\delta T_{i,j} = T_{i,j}^n - T_{i,j}^* + \Delta t \cdot \left\{ \Lambda_{i,j}^* + \delta T_{i,j} \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \Big|_{i,j}^* + \delta E_{i,j} \frac{\partial \Lambda}{\partial E} \Big|_{i,j}^* \right\} \quad (\text{A5.4})$$

$$\delta E_{i,j} = E_{i,j}^n - E_{i,j}^* - \frac{\Delta t \rho_{i,j}}{\gamma-1} \left[\Lambda_{i,j}^* + \delta T_{i,j} \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \Big|_{i,j}^* + \delta E_{i,j} \frac{\partial \Lambda}{\partial E} \Big|_{i,j}^* \right] \quad (\text{A5.5})$$

$$- \left(\tilde{B}_{i,j} \delta E_{i,j} + A_{i,j} \delta E_{i-1,j} + C_{i,j} \delta E_{i+1,j} + D_{i,j} \delta E_{i,j-1} + E_{i,j} \delta E_{i,j+1} \right. \\ \left. + \tilde{B}_{i,j} E_{i,j}^* + A_{i,j} E_{i-1,j}^* + C_{i,j} E_{i+1,j}^* + D_{i,j} E_{i,j-1}^* + E_{i,j} E_{i,j+1}^* \right) .$$

In Gl.(A5.3) und (A5.4) bedeutet der Index "*" an Λ und $\frac{\partial \Lambda}{\partial x}$, daß als Argumente die geschätzten Werte $T_{i,j}^*, E_{i,j}^*$ eingesetzt werden sollen. Die Gleichungen (A5.4) können nach den Temperaturkorrekturen aufgelöst werden

$$\delta T_{i,j} = \frac{\left[T_{i,j}^n - T_{i,j}^* + \Delta t \cdot \left(A_{i,j}^* + \delta E_{i,j} \frac{\partial \Lambda}{\partial E} \Big|_{i,j}^* \right) \right]}{\left(1 - \Delta t \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \Big|_{i,j}^* \right)} \quad (\text{A5.6})$$

und Einsetzen in Gl. (A5.5) liefert nach Umordnen

$$\begin{aligned} & + A_{i,j} \delta E_{i-1,j} + C_{i,j} \delta E_{i+1,j} + D_{i,j} \delta E_{i,j-1} + E_{i,j} \delta E_{i,j+1} \\ & \left[1 + \frac{\Delta t_e \delta E_{i,j} \frac{\partial \Lambda}{\partial E} \Big|_{i,j}^*}{\left(1 - \Delta t \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \Big|_{i,j}^* \right)} + \tilde{B}_{i,j} \right] \cdot \delta E_{i,j} = \\ & = E_{i,j}^n - E_{i,j}^* - \Delta t_e \frac{\left[(T_{i,j}^n - T_{i,j}^*) \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \Big|_{i,j}^* + A_{i,j}^* \right]}{\left(1 - \Delta t \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \Big|_{i,j}^* \right)} \\ & - \left(\tilde{B}_{i,j} E_{i,j}^* + A_{i,j} E_{i-1,j}^* + C_{i,j} E_{i+1,j}^* + D_{i,j} E_{i,j-1}^* + E_{i,j} E_{i,j+1}^* \right), \end{aligned} \quad (\text{A5.7})$$

wobei die Definition $\Delta t_e = \frac{\Delta t \rho_{i,j}}{\gamma - 1}$

verwendet wurde. Gleichung (A5.7) hat die gleiche Form wie Gl. (5.32)

$$A_{i,j} \delta E_{i-1,j} + C_{i,j} \delta E_{i+1,j} + D_{i,j} \delta E_{i,j-1} + E_{i,j} \delta E_{i,j+1} + B_{i,j} \delta E_{i,j} = R_{i,j} \quad (\text{A5.8})$$

und kann z.B. mit der SOR- oder der ICCG- (s. Anh. A7) Methode iterativ gelöst werden. In den folgenden Absätzen werden noch kurz die expliziten Ausdrücke der Matrixelemente angegeben.

A5.1 Diffusionsterm

Ausgeschrieben lautet der Diffusionsterm

$$\begin{aligned} & f_d \nabla \cdot \left(\frac{\lambda}{\rho(x+\sigma)} \nabla E \right) = \\ & = f_d \left\{ 3 \frac{\partial}{\partial r^3} \left(r^2 \frac{\lambda}{\rho(x+\sigma)} \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \sin \alpha} \left(\cos \alpha \frac{\lambda}{\rho(x+\sigma)} \frac{\partial E}{\partial \alpha} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A5.9})$$

Durch Umformen in ein FDG-System erhält man dann die Matrixelemente

$$\begin{aligned}
 A_{i,j}^d &= -f_d \frac{3}{(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3} \frac{(r_i^a)^2}{\bar{\rho}_{i,j}^r \bar{x}_{T_{i,j}}^r} \frac{\bar{\lambda}_{i,j}^r}{r_i^b - r_{i-1}^b} \\
 C_{i,j}^d &= -f_d \frac{3}{(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3} \frac{(r_{i+1}^a)^2}{\bar{\rho}_{i+1,j}^r \bar{x}_{T_{i+1,j}}^r} \frac{\bar{\lambda}_{i+1,j}^r}{r_{i+1}^b - r_i^b} \\
 D_{i,j}^d &= -f_d \frac{1}{(r_i^b)^2 (\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a)} \frac{\cos \alpha_j^a}{\bar{\rho}_{i,j}^\alpha \bar{x}_{T_{i,j}}^\alpha} \frac{\bar{\lambda}_{i,j}^\alpha}{\alpha_j^a - \alpha_{j-1}^a} \\
 E_{i,j}^d &= -f_d \frac{1}{(r_i^b)^2 (\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a)} \frac{\cos \alpha_{j+1}^a}{\bar{\rho}_{i,j+1}^\alpha \bar{x}_{T_{i,j+1}}^\alpha} \frac{\bar{\lambda}_{i,j+1}^\alpha}{\alpha_{j+1}^a - \alpha_j^a} \\
 B_{i,j}^d &= - (A_{i,j}^d + C_{i,j}^d + D_{i,j}^d + E_{i,j}^d)
 \end{aligned} \tag{A5.10}$$

In den Gleichungen (A5.10) haben die gequerten Größen wieder die gleiche Bedeutung wie oben. Der Absorptionskoeffizient κ_T beinhaltet die totale Absorption $\kappa_T = \kappa + \sigma$. Der Flux-Limiter λ wird nach Gl. (4.30) aus dem Gradienten R berechnet, und die entsprechenden Differenzengleichungen für R lauten

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{i,j}^r &= \frac{1}{\bar{\rho}_{i,j}^r \cdot \bar{x}_{T_{i,j}}^r} \left| \frac{E_{i,j} - E_{i-1,j}}{r_i^b - r_{i-1}^b} \right| \frac{1}{\bar{E}_{i,j}^r} \\
 \bar{R}_{i,j}^\alpha &= \frac{1}{\bar{\rho}_{i,j}^\alpha \cdot \bar{x}_{T_{i,j}}^\alpha} \left| \frac{E_{i,j} - E_{i,j-1}}{r_i^b (\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b)} \right| \frac{1}{\bar{E}_{i,j}^\alpha}
 \end{aligned} \tag{A5.11}$$

A5.2 Der $\nabla \cdot (u \cdot P)$ -Term

Der zweite Teil der Koeffizienten ist durch den Ausdruck $\nabla \cdot (u \cdot P)$ in der Strahlungsenergiegleichung gegeben. In einem beliebigen Koordinatensystem gilt

$$\nabla \cdot (u \cdot P) = (u_i P^{ij})_{;j} = u_{i,j} P^{ij} + u_i P^{ij}_{;j} + u_i \Gamma_{kj}^j P^{ki}, \tag{A5.12}$$

wobei das Semikolon die kovariante und das Komma die partielle Ableitung nach der entsprechenden Koordinate bezeichnen. Die Form der Christoffelsymbole für Kugelkoordinaten ist z.B. in Mihalas & Mihalas (1984, S. 675, Gl. A3.63) angegeben. Im Koordinatensystem (r, α, φ) erhält man

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 (u_r \mathbf{P}_{rr} + u_\alpha \mathbf{P}_{r\alpha} + u_\varphi \mathbf{P}_{r\varphi}) \right] \\
&+ \frac{1}{r \cos \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\cos \alpha (u_r \mathbf{P}_{\alpha r} + u_\alpha \mathbf{P}_{\alpha\alpha} + u_\varphi \mathbf{P}_{\alpha\varphi}) \right] \\
&+ \frac{1}{r \cos \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(u_r \mathbf{P}_{\varphi r} + u_\alpha \mathbf{P}_{\varphi\alpha} + u_\varphi \mathbf{P}_{\varphi\varphi}) \right].
\end{aligned} \tag{A5.13}$$

Der letzte Term in Gl. (A5.13) fällt aufgrund der Achsialsymmetrie ($\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$) weg und gemäß $\mathbf{P} = E \mathbf{T}_{\text{Edd}}$ (Gl. 4.20), wobei der Eddingtontensor durch Gl. (4.22) gegeben ist, gilt auch

$$\mathbf{P}_{r\varphi} = \mathbf{P}_{\alpha\varphi} = 0, \tag{A5.14}$$

weil im *comoving-frame* keine tangentielle Ausbreitung der Strahlung erfolgt ($F_\varphi = 0$, bzw. in Gl. 4.22 $\tilde{n}_\varphi = 0$). Also erhält man im Rahmen dieser Arbeit

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) &= 3 \frac{\partial}{\partial r^3} \left[r^2 (u_r \mathbf{P}_{rr} + u_\alpha \mathbf{P}_{r\alpha}) \right] \\
&+ \frac{\partial}{r \partial \sin \alpha} \left[\cos \alpha (u_r \mathbf{P}_{\alpha r} + u_\alpha \mathbf{P}_{\alpha\alpha}) \right].
\end{aligned} \tag{A5.15}$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
XR_{i,j} &= (r_1^a)^2 v_{i,j} \mathbf{T}_{i,j}^{rr} + (r_1^a)^3 \tilde{g}_{i,j} (\mathbf{T}_{i,j+1}^{\alpha r} + \mathbf{T}_{i,j}^{\alpha r}) / 2 \\
XA_{i,j} &= \cos \alpha_j^a \left[\tilde{v}_{i,j} (\mathbf{T}_{i+1,j}^{\alpha r} + \mathbf{T}_{i,j}^{\alpha r}) / 2 + r_1^b \tilde{g}_{i,j} \mathbf{T}_{i,j}^{\alpha\alpha} \right]
\end{aligned} \tag{A5.16}$$

erhält man die folgende Differenzengleichung

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P})_{i,j} &= 3 \left[XR_{i+1,j} (\tilde{\Delta} r_{i+1}^0 \cdot E_{i,j} + \tilde{\Delta} r_{i+1}^1 \cdot E_{i+1,j}) \right. \\
&- XR_{i,j} (\tilde{\Delta} r_i^0 \cdot E_{i-1,j} + \tilde{\Delta} r_i^1 \cdot E_{i,j}) \left. \right] / [(r_1^a)^3 - (r_1^b)^3] \\
&+ \frac{1}{r_i^b} \left[XA_{i,j+1} (\tilde{\Delta} \alpha_{j+1}^0 \cdot E_{i,j} + \tilde{\Delta} \alpha_{j+1}^1 \cdot E_{i,j+1}) \right. \\
&- XA_{i,j} (\tilde{\Delta} \alpha_j^0 \cdot E_{i,j-1} + \tilde{\Delta} \alpha_j^1 \cdot E_{i,j}) \left. \right] / [\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a].
\end{aligned} \tag{A5.17}$$

In Gleichung (A5.16) ist der Index "Edd" zur Vereinfachung weggelassen worden. Die geschlängelten Größen $\tilde{v}_{i,j}$ und $\tilde{g}_{i,j}$ sind an den Schnittpunkten des a-Gitters definiert, und deren Differenzengleichungen lauten folgendermaßen

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{i,j} &= [\tilde{\Delta}\tilde{\alpha}_j^1 (v_{i+1,j} + v_{i,j}) + \tilde{\Delta}\tilde{\alpha}_j^0 (v_{i+1,j-1} + v_{i,j-1})] / 2 \\ \tilde{g}_{i,j} &= [\tilde{\Delta}\tilde{r}_i^1 (g_{i,j+1} + g_{i,j}) + \tilde{\Delta}\tilde{r}_i^0 (g_{i-1,j+1} + g_{i-1,j})] / 2.\end{aligned}\quad (\text{A5.18})$$

Dabei sind die Interpolationsfaktoren $\tilde{\Delta}\tilde{r}_i$ und $\tilde{\Delta}\tilde{\alpha}_j$ definiert als

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}\tilde{r}_i^0 &= (r_i^b - r_i^a) / (r_i^b - r_{i-1}^b) \\ \tilde{\Delta}\tilde{r}_i^1 &= (r_i^a - r_{i-1}^b) / (r_i^b - r_{i-1}^b) \\ \tilde{\Delta}\tilde{\alpha}_j^0 &= (\alpha_j^b - \alpha_j^a) / (\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b) \\ \tilde{\Delta}\tilde{\alpha}_j^1 &= (\alpha_j^a - \alpha_{j-1}^b) / (\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b).\end{aligned}\quad (\text{A5.19})$$

Sie sind bei linearer Skalierung alle gleich $\frac{1}{2}$. Die FDG des Eddingtonensors werden nach Gl. (4.22) berechnet, wobei der Eddingtonfaktor f_{Edd} nach Gl. (4.33) aus λ und R berechnet wird. Die Hauptausbreitungsrichtung der Strahlung ist proportional zum Gradienten der Strahlungsenergie

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{E}}{|\nabla \cdot \mathbf{E}|} \quad (\text{A5.20})$$

mit

$$|\nabla \cdot \mathbf{E}| = \sqrt{((\nabla \cdot \mathbf{E})_r^2 + (\nabla \cdot \mathbf{E})_\alpha^2)}.$$

Zusammenfassend seien noch die Differenzengleichungen für diese Gradienten angegeben. Die Gleichungen für λ und R folgen dann ganz kanonisch.

Bei $\mathbf{T}_{rr}$:

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \mathbf{E})_{i,j}^r &= (E_{i,j} - E_{i-1,j}) / (r_i^b - r_{i-1}^b) \\ (\nabla \cdot \mathbf{E})_{i,j}^\alpha &= \frac{\tilde{\Delta}\tilde{r}_i^1 (E_{i,j+1} - E_{i,j-1}) + \tilde{\Delta}\tilde{r}_i^0 (E_{i-1,j+1} + E_{i-1,j-1})}{r_i^a (\alpha_{j+1}^b - \alpha_{j-1}^b)}\end{aligned}$$

Bei $T_{\alpha\alpha}$:

$$(\nabla \cdot E)_{i,j}^r = \frac{\widetilde{\Delta\alpha}_j^1 (E_{i+1,j} - E_{i-1,j}) + \widetilde{\Delta\alpha}_j^0 (E_{i+1,j-1} - E_{i-1,j-1})}{(r_{i+1}^b - r_{i-1}^b)}$$

$$(\nabla \cdot E)_{i,j}^\alpha = (E_{i,j} - E_{i,j-1}) / r_i^b / (\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b)$$

Bei $T_{r\alpha}$:

$$(\nabla \cdot E)_{i,j}^r = \frac{[\widetilde{\Delta\alpha}_j^1 (E_{i,j} - E_{i-1,j}) + \widetilde{\Delta\alpha}_j^0 (E_{i,j-1} - E_{i-1,j-1})]}{(r_i^b - r_{i-1}^b)}$$

$$(\nabla \cdot E)_{i,j}^\alpha = \frac{[\widetilde{\Delta r}_i^1 (E_{i,j} - E_{i,j-1}) + \widetilde{\Delta r}_i^0 (E_{i-1,j} - E_{i-1,j-1})]}{r_i^a (\alpha_j^b - \alpha_{j-1}^b)}$$

Die Matricelemente dieses Teils lauten schließlich

$$\begin{aligned} A_{i,j}^p &= - \frac{3}{[(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3]} X R_{i,j} \widetilde{\Delta r}_i^0 \\ C_{i,j}^p &= \frac{3}{[(r_{i+1}^a)^3 - (r_i^a)^3]} X R_{i+1,j} \widetilde{\Delta r}_{i+1}^0 \\ D_{i,j}^p &= - \frac{1}{r_i^b [\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a]} X A_{i,j} \widetilde{\Delta \alpha}_j^0 \\ E_{i,j}^p &= \frac{1}{r_i^b [\sin \alpha_{j+1}^a - \sin \alpha_j^a]} X A_{i,j+1} \widetilde{\Delta \alpha}_{j+1}^0 \\ B_{i,j}^p &= A_{i,j}^p \frac{\widetilde{\Delta r}_i^1}{\widetilde{\Delta r}_i^0} + C_{i,j}^p \frac{\widetilde{\Delta r}_{i+1}^1}{\widetilde{\Delta r}_{i+1}^0} + D_{i,j}^p \frac{\widetilde{\Delta \alpha}_j^1}{\widetilde{\Delta \alpha}_j^0} + E_{i,j}^p \frac{\widetilde{\Delta \alpha}_{j+1}^1}{\widetilde{\Delta \alpha}_{j+1}^0} \end{aligned} \quad (A5.21)$$

A6 Die Matricelemente bei der teilweisen Linearisierung

Zur Vereinfachung beschränken wir uns hier zunächst auf die Heiz- bzw. Kühlerme, da nur diese nichtlinear in E und T sind. Es werden also die folgenden beiden Gleichungen betrachtet

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \tilde{\Lambda}(E, T) \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -\frac{\rho}{(\gamma-1)} \cdot \tilde{\Lambda}(E, T) .\end{aligned}\tag{A6.1}$$

Statt $\tilde{\Lambda}$ wird ab jetzt wieder einfach Λ verwendet. Die Linearisierung der Gleichungen und Elimination der Variationen δE und δT durch

$$\begin{aligned}\delta T &= T^{n+1} - T^n \\ \delta E &= E^{n+1} - E^n\end{aligned}\tag{A6.2}$$

führt auf die Gleichung

$$\delta T_{i,j} = \frac{\Delta t \cdot \left(\Lambda_{i,j}^* + \delta E_{i,j} \frac{\partial \Lambda}{\partial E} \Big|_{i,j}^* \right)}{\left(1 - \Delta t \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \Big|_{i,j}^* \right)}\tag{A6.3}$$

für die Temperaturkorrektur, und Einsetzen in die Energiegleichung liefert

$$\begin{aligned}E_{i,j}^{n+1} \cdot \left[1 + \frac{\Delta t_e \frac{\partial \Lambda}{\partial E} \Big|_{i,j}^*}{\left(1 - \Delta t \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \Big|_{i,j}^* \right)} \right] &= \\ &= E_{i,j}^n - \Delta t_e \cdot \frac{\left[\Lambda_{i,j}^* - E_{i,j}^n \frac{\partial \Lambda}{\partial E} \Big|_{i,j}^* \right]}{\left(1 - \Delta t \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \Big|_{i,j}^* \right)} .\end{aligned}\tag{A6.4}$$

Die Temperaturgleichung (A6.3) kann direkt aus Gl. (A5.6) gewonnen werden, mit Hilfe der in Kap. (6.3) beschriebenen Annahme $T^* \approx T^n$. Bezieht man den Diffusions- und $\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{P})$ -Term mit ein, so lauten die Matricelemente (vgl. obigen Anh.

A5) der Gleichung (5.34)

$$A_{i,j} = A_{i,j}^d + A_{i,j}^p, \quad C_{i,j} = C_{i,j}^d + C_{i,j}^p$$

$$D_{i,j} = D_{i,j}^d + D_{i,j}^p, \quad E_{i,j} = E_{i,j}^d + E_{i,j}^p$$

und

$$B_{i,j} = 1 + B_{i,j}^d + B_{i,j}^p + \Delta t_e \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial E} \right|_{i,j}^* \left/ \left(1 - \Delta t \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \right|_{i,j}^* \right) \right.$$

$$R_{i,j} = E_{i,j}^n - \Delta t_e \cdot \left[A_{i,j}^* - E_{i,j}^n \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial E} \right|_{i,j}^* \right] \left/ \left(1 - \Delta t \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \right|_{i,j}^* \right) \right.$$

Die Berechnung der neuen Temperaturen $T_{i,j}^{n+1}$ erfolgt dann nach Gl. (A6.3) und (A6.2).

Die Matrixgleichungen der teilweisen und vollständigen Linearisierung unterscheiden sich also nur in den Diagonalen $B_{i,j}$ und den rechten Seiten $R_{i,j}$ voneinander. Allerdings lautet der Lösungsvektor im ersten Fall $\delta E_{i,j}$ und im zweiten direkt $E_{i,j}^{n+1}$. Diese Unterschiede führen zu einer wesentlich schnelleren Konvergenz der iterativen Verfahren SOR oder ICCG im Fall der teilweisen Linearisierung.

A7 Die Incomplete Cholesky Conjugate Gradient (ICCG) Methode

Die *Conjugate Gradient* (CG) Methode wurde zunächst als Verfahren zur Bestimmung der Extrema von mehrdimensionalen Funktionen $f(\mathbf{x})$ entwickelt. Wählt man

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left| \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} \right|^2,$$

so sieht man, daß für die Extrema

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$$

gilt. Dies ist somit äquivalent zu einer Lösung der Matrixgleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{A7.1})$$

mit dem Lösungsvektor $\mathbf{x}$. Beim iterativen CG-Lösungsalgorithmus wird zunächst

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$$

gesetzt und anschließend rekursiv

$$\alpha_i = |\mathbf{r}_i|^2 / (\mathbf{p}_i, \mathbf{A} \mathbf{p}_i)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{A} \mathbf{p}_i \quad (\text{A7.2})$$

$$\beta_i = |\mathbf{r}_{i+1}|^2 / |\mathbf{r}_i|^2$$

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1} + \beta_i \mathbf{p}_i$$

berechnet. Dabei repräsentieren die Ausdrücke $(\mathbf{p}_i, \mathbf{A} \mathbf{p}_i)$ das innere Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{p}_i$ und $\mathbf{A} \mathbf{p}_i$. Der Algorithmus (A7.2) ist in dieser Form nur für symmetrische positiv definite Matrizen $\mathbf{A}$ gültig. Bei Matrizen, die von den Differenzengleichungen eines PDG-Systems herrühren, konvergiert die CG-Methode in ihrer einfachen Form (A7.2) recht langsam (z.B. Kershaw, 1978). Darauf aufbauend haben zunächst Meijerink & van der Vorst (1977) die *Incomplete Cholesky Conjugate Gradient*

(ICCG) Methode für symmetrische positiv definite M -Matrizen³⁷⁾ entwickelt, die von Kershaw (1978, 1980) auf allg. Matrizen erweitert wurde. Eine (sym. pos. def.) Matrix A kann mit Hilfe der Cholesky Zerlegung geschrieben werden als

$$A = LL^T, \quad (A7.3)$$

wobei L eine untere Dreiecksmatrix ist. Unvollständig ist die Zerlegung dann, wenn nicht alle Elemente in L berücksichtigt werden. Für lineare Gleichungssysteme, die von FDG stammen bietet sich an

$$L_{i,j} = 0, \text{ falls } (i,j) \in P = \{(i,j) \mid A(i,j) = 0 \text{ } (i,j = 1, \dots, N)\}$$

zu setzen, d.h. der Matrix L wird die gleiche Besiedlungsstruktur wie der Ausgangsmatrix A aufgeprägt. Die Zerlegung ist damit natürlich nicht mehr exakt, und man erhält

$$A = LL^T + E, \quad (A7.4)$$

wobei die Fehlermatrix E nur für Elemente in P nicht verschwindet. Anstelle des Originalsystems (A7.1) wird nun die äquivalente Gleichung

$$\left[L^{-1}A(L^T)^{-1} \right] L^T x = L^{-1}b \quad (A7.5)$$

gelöst mit der "unvollständigen" Matrix L . Falls $(LL^T)^{-1}$ eine Näherung an die Matrix A darstellt, so ist $L^{-1}A(L^T)^{-1}$ näherungsweise die Einheitsmatrix und die CG-Methode, angewandt auf $L^{-1}A(L^T)^{-1}$, sollte sehr schnell konvergieren (Kershaw, 1978).

Bei Verallgemeinerung auf beliebige dünn besiedelte Matrizen wird anstelle der Cholesky Zerlegung eine unvollständige LU -Zerlegung durchgeführt

$$A = LU + E, \quad (A7.6)$$

und das (A7.5) entsprechende Gleichungssystem gelöst. Kershaw (1980) gibt nun den folgenden effizienten Algorithmus für die *Incomplete LU Conjugate Gradient*³⁸⁾ Methode an

37) Für die Elemente einer M -Matrix gilt $a_{i,j} < 0$ für $i \neq j$.

38) Trotz der leichten Inkorrektheit wird weiterhin die Bezeichnung ICCG auch für die LU Zerlegung verwendet.

$$r_0 = b - Ax_0, \quad p_0 = A^T z_0$$

$$\alpha_i = (r_i, z_i) / (p_i, s_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i s_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A s_i \quad (A7.7)$$

$$\beta_i = (r_{i+1}, z_{i+1}) / (r_i, z_i)$$

$$p_{i+1} = A^T r_{i+1} + \beta_i p_i.$$

In (A7.7) wurden die Definitionen

$$\begin{aligned} z_i &= (LL^T)^{-1} r_i \\ s_i &= (U^T U)^{-1} p_i \end{aligned} \quad (A7.8)$$

verwendet. Wenn bei der unvollständigen LU -Zerlegung ein Diagonalelement U_{ii} betragsmäßig zu klein wird, muß aus Stabilitätsgründen eine kleine Modifikation vorgenommen werden (Kershaw, 1978, 1980). Die ICCG-Methode ist bei vielen Problemen bedeutend schneller als andere iterative Algorithmen (z.B. SOR, GS) zur Lösung von Matrixgleichungen (Kershaw, 1978; Peyret & Taylor, 1983, App. C). Im folgenden Abschnitt seien übersichtshalber die wesentlichen Rechenschritte des Algorithmus (A7.6) aufgeführt.

Ausgehend von dem linearen Gleichungssystem (A7.1), das in diesem Fall von der Struktur (5.32) ist

$$A_{i,j} x_{i-1,j} + C_{i,j} x_{i+1,j} + D_{i,j} x_{i,j-1} + E_{i,j} x_{i,j+1} + B_{i,j} x_{i,j} = b_{i,j}, \quad (A7.9)$$

erhält man bei Aufprägung der gleichen Besiedlungsstruktur (A7.9) auf die Matrizen L und U

$$\begin{aligned} CU_{i,j} &= C_{i,j} \\ EU_{i,j} &= E_{i,j} \\ BU_{i,j} &= B_{i,j} - \frac{D_{i,j} E_{i,j-1}}{BU_{i,j-1}} - \frac{A_{i,j} C_{i-1,j}}{BU_{i-1,j}} \end{aligned} \quad (A7.10)$$

$$DL_{i,j} = \frac{D_{i,j}}{BU_{i,j-1}}$$

$$AL_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{BU_{i-1,j}} \quad (A7.11)$$

$$BL_{i,j} = 1 \text{ .}$$

Der erste Buchstabe des Koeffizienten korrespondiert dabei zum entsprechenden Element der Ausgangsmatrix A und der zweite zu L bzw. U , wobei die Diagonalelemente von L konventionell mit eins vorbelegt wurden. Die Berechnung von z_i und s_i erfolgt jeweils in zwei Schritten. Umgeschrieben lautet (A7.8a) $LL^T z_i = r_i$, wobei zuerst

$$Ly_i = r_i$$

für y_i , und anschließend

$$L^T z_i = y_i$$

für z_i gelöst wird. Da L und L^T untere (obere) Dreiecksmatrizen sind, erhält man die entsprechenden Lösungsvektoren y_i, z_i direkt durch vorwärtiges (rückwärtiges) Einsetzen

$$y_{i,j}^i = (r_{i,j}^i - AL_{i,j} y_{i-1,j}^i - DL_{i,j} y_{i,j-1}^i) / BL_{i,j} \quad (A7.12)$$

$$z_{i,j}^i = (y_{i,j}^i - AL_{i+1,j} z_{i-1,j}^i - DL_{i,j+1} z_{i,j-1}^i) / BL_{i,j} \text{ .}$$

Dabei müssen natürlich die korrekten Randbedingungen berücksichtigt werden. Der Iterationsindex ist in (A7.12) zur besseren Übersicht als oberer Index geschrieben worden. Ebenso wird (A7.8b) in den zwei Schritten

$$U^T y_i = p_i$$

und

$$Us_i = y_i \text{ .}$$

gelöst, was ausgeschrieben

$$y_{i,j}^i = (p_{i,j}^i - CU_{i-1,j} y_{i-1,j}^i - EU_{i,j-1} y_{i,j-1}^i) / BU_{i,j} \quad (A7.13)$$

$$s_{i,j}^i = (y_{i,j}^i - CU_{i,j} s_{i+1,j}^i - EU_{i,j} s_{i,j+1}^i) / BU_{i,j}$$

lautet. Konvergenz bei der Iterationsvorschrift (A7.7) ist erreicht, wenn die ursprüngliche Residuumsnorm um einen bestimmten Faktor

$$\varepsilon = \frac{|r_i|}{|r_0|}$$

herabgesetzt wurde, mit typischerweise $\varepsilon = 10^{-8}$ bis 10^{-7} .

Bei den Rechnungen hat sich zusätzlich herausgestellt, daß der Algorithmus schneller konvergiert, wenn die Matrix **A** vorher normiert wird, so daß die Diagonalelemente gleich eins sind (NICCG-Methode).

A8 Einige astrophysikalische Konstanten

Vakuumlichtgeschwindigkeit	$c = 2.998 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$
Protonenruhemasse	$m_p = 1.673 \cdot 10^{-24} \text{ g}$
Elektronenruhemasse	$m_e = 9.109 \cdot 10^{-28} \text{ g}$
Gravitationskonstante	$G = 6.673 \cdot 10^{-8} \text{ dyn cm}^2/\text{g}^2$
Boltzmannkonstante	$k = 1.381 \cdot 10^{-16} \text{ erg/K}$
Gaskonstante	$R = 8.314 \cdot 10^7 \text{ erg K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Stefan-Boltzmannkonstante	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$
Strahlungsdichte $a = 4\sigma/c$	$a = 7.565 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$
Sonnenmasse	$M_\odot = 1.989 \cdot 10^{33} \text{ g}$
Sonnenradius	$R_\odot = 6.960 \cdot 10^{10} \text{ cm}$
Leuchtkraft der Sonne	$L_\odot = 3.82 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}$

Literaturverzeichnis

- Bailey, J., 1975, *J. Brit. astr. Ass.* **86**, 30
- Bath, G.T., 1974, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **171**, 311
- Bath, G.T., Pringle, J.E., 1985, in *Interacting Binary Stars*, J.E. Pringle, R.A. Wade (Hrsg.) CUP 1985, p. 177
- Buchler, J.R., 1979, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **22**, 293
- Buchler, J.R., 1983, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **30**, 395
- Burger, H.L., Katz, J.I., 1980, *Astrophys. J.* **236**, 921
- Burkert, A., Hensler, G., 1985, in *Proc. ESA Workshop: Recent Results on Cataclysmic Variables*, Bamberg, *ESA SP-236*, June 1985, p. 67
- Carone, T.E., Polidan, R.S. & Wade, R.A., 1987, *Astrophys. Space Sci.* **130**, 239
- Chevalier, R.A., Klein, R.I., 1979, *Astrophys. J.* **234**, 597
- Colella, P., Woodward, P.R., 1984, *J. Comput. Phys.* **54**, 174
- Cordova, F.A., Mason, K.O., 1982, *Astrophys. J.* **260**, 716
- Cordova, F.A., Mason, K.O., 1983, in *Accretion-Driven Stellar X-ray Sources*, W. Lewin, E. van den Heuvel (Hrsg.), CUP 1983, p. 147
- Cordova, F.A., Mason, K.O., 1984, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **206**, 879
- Crawford, J.A., Kraft, R.P., 1956, *Astrophys. J.* **123**, 44
- Dreier, H., 1986, Diplomarbeit, Universität München
- Drew, J., Verbunt, F., 1985, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **213**, 191
- Drew, J., Verbunt, F., 1987, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **234**, 341
- Duschl, W., 1985, Dissertation, Universität München
- Eggum, G.E., Coroniti, F.V. & Katz, J.I., 1985, *Astrophys. J.* **298**, L41
- Eggum, G.E., Coroniti, F.V. & Katz, J.I., 1987, *Astrophys. J.* **323**, 634
- Everson, B.L., 1981, Vorabdruck
- Ferland, G.J., Langer, S.H., MacDonald, J., Pepper, G.H., Shaviv, G. & Truran, J.W., 1982, *Astrophys. J.* **262**, L53
- Frank, J., King, A.R., Raine, D.J., 1985, *Accretion Power in Astrophysics*, CUP, 1985
- Fryxell, B.A., Taam, R.E. & Mc Millan, S.L.W., 1987, *Astrophys. J.* **315**, 536
- Fu, A., 1987, *Astrophys. J.* **323**, 211
- Gicger, A., 1987, *Acta Astron.* **37**, 29
- Gilliland, R.L., Kemper, E., Suntzeff, N., 1986, *Astrophys. J.*, **301**, 252
- Greenstein, J.L. & Kraft, R.P., 1959, *Astrophys. J.*, **130**, 99
- Hawley, J.F., Smarr, L.L. & Wilson, J.R., 1984, *Astrophys. J. Suppl.* **55**, 211
- Hensler, G., 1982a, *Astron. Astrophys.*, **114**, 309
- Hensler, G., 1982b, *Astron. Astrophys.*, **114**, 319
- Horne, K., 1985, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **213**, 129

- Horne, K., Cook, M.C., 1985, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **214**, 307
- Hsieh, S.H., Spiegel, E.A., 1976, *Astrophys. J.* **207**, 244
- Hunt, R., 1971, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **154**, 141
- Icke, V., 1980, *Astron. J.* **85**, 329
- Jensen, K.A., 1984, *Astrophys. J.* **278**, 278
- Joy, A.H., 1942, *PASP* **54**, 35
- Kallman, T.R., 1983, *Astrophys. J.* **272**, 238
- Kallman, T.R., Jensen, K.A. 1985, *Astrophys. J.* **299**, 277
- Kershaw, D.S., 1978, *J. Comp. Phys.* **26**, 43
- Kershaw, D.S., 1980, *J. Comp. Phys.* **38**, 114
- King, A.R., 1988, *Quart. J. Roy. astr. Soc.* **29**, 1
- King, A.R., Shaviv, G., 1984, *Nature* **308**, 519
- King, A.R., Watson, M.G. & Heise, J. 1985, *Nature* **313**, 290
- Kippenhahn, R., Thomas, H.-C., 1978, *Astron. Astrophys.* **63**, 265
- Kippenhahn, R., Thomas, H.-C., 1982, *Astron. Astrophys.* **114**, 77
- Klare, G., Krautter, J., Wolf, B., Stahl, O., Vogt, N., Wargau, W. & Rahe, J., 1982, *Astron. Astrophys.* **113**, 76
- Kley, W., 1985, Diplomarbeit München
- Kley, W., Hensler, G., 1987a, *Astron. Astrophys.* **172**, 124
- Kley, W., Hensler, G., 1987b, *Astrophys. Space Sci.* **130**, 321
- Kraft, R.P., 1958, *Astrophys. J.* **127**, 625
- Kraft, R.P., 1962, *Astrophys. J.* **135**, 408
- Krzeminski, W. & Smak, J.I., 1971, *Acta Astron.*, **21**, 133
- la Dous, C., 1984, Dissertation, Universität München
- Landau, L.O., Lifshitz, E.M., 1987, *Fluid Mechanics*, 2. Aufl., Pergamon Press
- Levermore, C.D., 1984, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **31**, 149
- Levermore, C.D., Pomraning, G.C., 1981, *Astrophys. J.* **248**, 321
- Lin, D.N.C. & Pringle, J.E., 1976, in *Structure and Evolution of Close Binary Systems*, IAU Symp. 73, P. Eggleton et al. (Hrsg.), p. 237
- Lüst, R., 1952, *Z. Naturforschg.* **7a**, 87
- Lynden-Bell, D., Pringle, J.E., 1974, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **168**, 603
- Mac Donald, J., 1983, *Astrophys. J.* **273**, 289
- Marsh, T.R., Horne, K., Shipman, H.L., 1987, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **225**, 551
- Mason, K., 1985, *Sp. Sci. Rev.* **40**, 99
- Meijerink, J.A., van der Vorst, H.A., 1977, *Math. Comp.* **31**, 148
- Meyer, F., Meyer-Hofmeister, E., 1981, *Astron. Astrophys.* **104**, L10
- Meyer, F., Meyer-Hofmeister, E., 1982, *Astron. Astrophys.* **106**, 34
- Mihalas, D., Klein, R.I., 1982, *J. Comput. Phys.* **46**, 97

- Mihalas, D., Mihalas, B.W., 1984, *Foundations of Radiation Hydrodynamics* (Oxford University Press, NY)
- Minerbo, G.N., 1978, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **20**, 541
- Mouche, C.W., Raymond, J.C., 1987, *Astrophys. J.* **323**, 690
- Nauenberg, M., 1972, *Astrophys. J.* **175**, 417
- Osborne, J.P., 1987, *Astrophys. Space Sci.* **130**, 207
- Osher, S., Chakravarthy, S., 1983, *J. Comput. Phys.* **50**, 447
- Paczynski, B., 1971, *Ann. Rev. Astr. Astrophys.* **9**, 183
- Paczynski, B., 1978, *Acta Astron.*, **28**, 253
- Paczynski, B., Schwarzenberg-Czerny, 1980, *Acta Astron.*, **30**, 126
- Papaloizou, J.C.B., Stanley, G.Q.G., 1986, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **220**, 593
- Patterson, J., 1984, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **54**, 443
- Patterson, J., Raymond, J.C., 1985, *Astrophys. J.* **292**, 535
- Patterson, J., Raymond, J.C., 1985, *Astrophys. J.* **292**, 550
- Payne-Gaposchkin, C. & Gaposchkin, S., 1938, *Variable Stars*, Harvard Observatory
- Peaceman, D.W., Rachford, H.H., 1955, *J. SIAM* **3**, 28
- Petterson, J.A., 1983, in *Accretion-Driven Stellar X-ray Sources*, W. Lewin, E. van den Heuvel (Hrsg.), CUP 1983, p. 367
- Peyret, R., Taylor, T.D., 1983, in *Computational Methods of Fluid Flow*, Springer Verlag, NY, Anh. C
- Polidan, R.S., Holberg, J.B., 1984, *Nature* **309**, 528
- Polidan, R.S., Carone, T.E., 1987, *Astrophys. Space Sci.* **130**, 235
- Pomraning, G.C., 1973, *The Equations of Radiation Hydrodynamics*, Pergamon Press
- Prendergast, K.H., Burbidge, G.R., 1968, *Astrophys. J.* **151**, L83
- Pringle, J.E., 1977, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **178**, 195
- Pringle, J.E., 1981, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **19**, 137
- Pringle, J.E., 1988, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **230**, 587
- Pringle, J.E., Savonije, G.J., 1979, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **197**, 777
- Pringle, J.E., Bateson, F.M., Hassall, B.J.M., Heise, J., Van der Woerd, H., Holberg, J.B., Polidan, R.S., van Amerongen, S., van Paradijs, J. & Verbunt, F., 1987, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **225**, 73
- Regev, O., 1983, *Astron. Astrophys.* **126**, 146
- Regev, O., Hugerat, A.A., 1988, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **232**, 81
- Ritter, H., 1983 in *High Energy Astrophysics and Cosmology*, Proc. of Academia Sinica-Max-Planck-Society Workshop on High Energy Astrophysics, Yang Jian & Zuh Cisheng (Hrsg.), Science Press Beijing, Gordon and Breach Science Publ. S.A., S. 207

- Ritter, H., 1985, *Astron. Astrophys.*, **148**, 207
- Ritter, H., 1987, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **70**, 335
- Roache, P.J., 1982, *Computational Fluid Dynamics* (Hermosa Publ., Albuquerque)
- Robertson, J.A., Frank, J., 1986, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **221**, 279
- Robinson, E.L., 1976, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **14**, 119
- Rozyczka, M., 1985, *Astron. Astrophys.* **143**, 59
- Sawada, K., Shima, E., Matsuda, T., Inaguchi, T., 1986, *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.* **48**, 240
- Shafter, A.W., Szkody, P., Liebert, J., Penning, W.R., Bond, H.E. & Grauer, A.D. 1985, *Astrophys. J.* **290**, 707
- Shakura, N.I., Sunyayev, R.A., 1973, *Astron. Astrophys.* **24**, 337
- Shaviv, G., 1987, *Astrophys. Space Sci.* **130**, 303
- Shima, E., Matsuda, T., Takeda, H., Sawada, K., 1985, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **217**, 367
- Siemiginowska, A., 1988, *Acta Astron.* **38**, 21
- Simon, R., 1963, *J. Quant. Spectrosc. Rad. Transf.* **3**, 1
- Sion, E.M., 1986, *PASP* **98**, 821
- Sion, E.M., 1987, *Astrophys. Space Sci.* **130**, 47
- Smak, J., 1984a, *Acta Astron.* **34**, 163
- Smak, J., 1984b, *Acta Astron.* **34**, 317
- Smak, J., 1985, in *Multifrequency Behaviour of Galactic Accreting Sources*, Frascati Workshop, 1984, Ed. F. Giovanelli, p. 3
- Smarr, L., 1978, in *Sources of gravitational Radiation* Ed. L.Smarr (CUP), p.139
- Sod, G.A., 1978, *J. Comput. Phys.* **27**, 1
- Sulkanen, M.E., Brasure, L.W., Patterson, J., 1981, *Astrophys. J.* **244**, 579
- Szkody, P., , 1985, in *Proc. ESA Workshop: Recent Results on Cataclysmic Variables*, Bamberg, *ESA SP-236*, June 1985, p. 39
- Szkody, P., Mattei, J.,A., 1984, *PASP* **96**, 988
- Thomas, L.H., 1930, *Quart. J. of Math.* (Oxford) **1**, 239
- Torbett, M.V., 1984, *Astrophys. J.* **278**, 318
- Tscharnuter, W.M., Winkler, K.H., 1979, *Comp. Phys. Comm.* **18**, 171
- Tylenda, R., 1977, *Acta Astron.* **27**, 3
- Tylenda, R., 1981, *Acta Astron.* **31**, 267
- Urpin, V.A., 1983, *Astrophys. Space Sci.* **90**, 79
- Urpin, V.A., 1984, *Sov. Astron.* **28**, 50
- van Paradijs, J., 1983, *Astron. Astrophys.* **125**, L16
- van der Woerd, H., 1987, *Astrophys. Space Sci.* **130**, 225
- Varga, R.S., 1962, *Matrix Iterative Analysis* (Prentice-Hall, INC.)

- Verbunt, F., 1982, *Space Sci. Rev.* **32**, 379
- Verbunt, F. & Zwaan, C., 1981, *Astron. Astrophys.*, **100**, 17
- Wade, R.A., 1984, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **208**, 381
- Wade, R.A., Ward, M.J., 1985, in *Interacting Binary Stars*, J.E. Pringle, R.A. Wade (Hrsg.), CUP 1985, p. 129
- Walker, M.F., 1954, *PASP*, **66**, 230
- Warner, B., 1976, in *Structure and Evolution of Close Binary Systems*, IAU Symp. 73, P. Eggleton *et al.* (Hrsg.), p. 85
- Warner, B., 1987, *Astrophys. Space Sci.* **130**, 3
- Weizsäcker von, C.F., 1943, *Z. Astrophysik*, **22**, 319
- Weizsäcker von, C.F., 1948, *Z. Naturforsch.* **3a**, 524
- Whitehurst, R., 1988, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **232**, 35
- Winkler K.-H., Norman M.L. & Mihalas D., 1984, Max Planck Inst. für Astrophys., Preprint MPA-112
- Young, P.J., Schneider, D.P., 1980, *Astrophys. J.*, **238**, 955
- Young, P.J., Schneider, D.P., Shetman, S.A., 1981, *Astrophys. J.*, **245**, 1035
- Yorke, H.W., 1986, in *Astrophysical Radiation Hydrodynamics*, Eds. K.-H.A. Winkler and M.L. Norman (Reidel)

Lebenslauf

von **Wilhelm Kley**

Geb. am 19.02.58 in Soest (Westf.)

Vater : Ernst-August Kley, Pfarrer

Mutter : Ruth Kley, Hausfrau

Schulausbildung

Besuch der Grundschule von 1965 bis 1968 in
Bad Boll und Villigst

Ab Sept. 1968 Besuch des Friedrich Bährens Gymnasiums
in Schwerte (Ruhr), Abiturabschluß im Juni 1977

Wehrdienst vom Juni 1977 bis Sept. 1978

Studium

Beginn eines Physikstudiums im Oktober 1978 an der
Ruhr-Universität Bochum, Vordiplom im August 1980

Einjähriger Studienaufenthalt vom Oktober 1980 bis September 1981
an der University of Sussex, England

Fortsetzung des Physikstudiums an der LMU München ab
Oktober 1981, Diplomabschluß im Dezember 1985

seit Februar 1986 wissenschaftlicher Angestellter am Institut für
Astronomie & Astrophysik der LMU München

Ein Letztes

Dieses Projekt wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unter dem Kennzeichen He 1487/1-1 gefördert.

Die Rechnungen zu dieser Arbeit wurden am Leibniz-Rechenzentrum München auf einer CDC Cyber 995 durchgeführt.

